MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

H. WIELANDT
TÜBINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ
A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

55. BAND 3. (SCHLUSS-)HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 12. MAI 1952)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1952

Math.
Z.

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 3, S. 269—275 (1952).

Teilbarkeitstheorie in Bereichen.

Von

Paul Lorenzen in Bonn.

Der klassische Fall der Teilbarkeitstheorie ist der Integritätsbereich der ganz-rationalen oder ganz-algebraischen Zahlen. Die Teilbarkeitsrelation R ist eine Halbordnung der multiplikativen Gruppe G des Quotientenkörpers und die (Dedekindschen) Ideale bilden eine Halbverbandshalbgruppe H_d, die G enthält (wenn assoziierte Elemente identifiziert werden).

Für halbgeordnete Gruppen G, die in einer Halbverbandshalbgruppe H_r enthalten sind, gilt über die Darstellbarkeit der Halbordnung R von G als Konjunktion r-zulässiger Ordnungen von G:

Satz 1. *R ist genau dann Konjunktion r-zulässiger Ordnungen, wenn G r-abgeschlossen ist.*

Satz 2. *Ist G r-abgeschlossen, dann ist die reguläre Verbandsgruppe V die durch $a_1 \frown \ldots \frown a_m < b_1 \smile \ldots \smile b_n \longleftrightarrow$ für alle r-zulässigen Ordnungen S von G:*

$$\min(a_1, \ldots, a_m)\, S \max(b_1, \ldots, b_n)$$

definiert wird, das duale v-Idealsystem des Systems der r-abgeschlossenen Ideale.

Für Verbandsgruppen G gilt über die Darstellbarkeit von R dagegen:

Satz 3. *R ist genau dann Konjunktion zulässiger Ordnungen von G, wenn G regulär ist**).

Statt halbgeordneter Gruppen betrachtet die vorliegende Arbeit Bereiche (halbgeordnete Mengen mit Operatoren) und weist nach, daß die Sätze 1—3 (bis auf eine Modifikation von Satz 2) trotzdem gültig bleiben. Für die auf diesen Sätzen aufgebaute Teilbarkeitstheorie ist also die Voraussetzung der Gruppeneigenschaften entbehrlich. Die Abweichung in Satz 2 wird dadurch bedingt, daß für Bereiche nicht mehr — wie für Gruppen — jede Halbverbandsordnung eine Verbandsordnung sein muß.

§ 1.

Bereiche.

B sei eine Menge (Elemente $a, b, \ldots$), R eine zweistellige Relation in B und G eine Menge von Operatoren $x, y, \ldots$ von B.

*) Vgl. P. Lorenzen, Math. Z. 52, 1949. Die obigen Sätze 1 bzw. 2 bzw. 3 ergeben sich aus Satz 26 bzw. pp. 510, 514 bzw. Satz 13, p. 503 der zitierten Arbeit.

Definition 1. B heißt ein *Bereich* (bezügl. R und G), wenn für alle a, b, c und x gilt

(1.1) $$aRa$$

(1.2) $$aRb,\ bRc \rightarrow aRc$$

(1.3) $$aRb \rightarrow xaRxb.$$

Da (1.3) für den Operator 1 (definiert durch $1 \cdot a = a$) und für xy (definiert durch $(xy)a = x(ya)$) gilt, falls für x und y, sei im Folgenden stets angenommen, daß G eine Halbgruppe mit Einselement ist.

R heißt die Halbordnung von B. Statt aRb werde $a < b$ oder $b > a$ geschrieben. $a = b$ bedeute $a < b$ und $b < a$ (= braucht nicht die Identität zu sein).

Gilt $a < b$ oder $a > b$ für alle a und b, dann heißt R eine *Ordnung*.

Definition 2. Ein Bereich B heißt ein *Halbverbandsbereich*, wenn für alle a, b ein größter gemeinsamer Teiler $a \frown b$ existiert, so daß für alle c und x gilt

(1.4) $$c < a \frown b \longleftrightarrow c < a,\ c < b$$

(1.5) $$x(a \frown b) = xa \frown xb.$$

Existiert auch ein kleinstes gemeinsames Vielfaches $a \smile b$ mit zu (1.4), (1.5) dualen Bedingungen, dann heißt B ein Verbandsbereich.

Definition 3. Eine Halbordnung S eines Halbverbandsbereiches B (bezügl. R und G) heißt *zulässig*, wenn für alle a, b, c und x gilt

(1.6) $$R \subset S$$

(1.7) $$aSb \rightarrow xaSxb$$

(1.8) $$cSa,\ cSb \rightarrow cSa \frown b.$$

Eine Halbordnung eines Verbandsbereichs heißt *zulässig*, wenn auch noch die zu (1.8) duale Bedingung gilt.

Die Halbordnung R eines Bereichs B induziert in jeder Untermenge B_0 von B eine Halbordnung R_0 von B_0. R heißt eine *Fortsetzung* von R_0 auf B. Ist B_0 zulässig bezügl. G (d. h. $xB_0 \subset B_0$ für alle x), dann induziert G eine Operatorenhalbgruppe G_0 von B_0. B heißt dann ein *Oberbereich* von B_0 (bezügl. R_0 und G_0).

§ 2.

Ideale.

B sei ein Bereich (bezügl. R und G).

Definition 4. Ein minimaler Halbverbandsoberbereich H von B heißt ein *Idealbereich* von B.

Die Idealbereiche von B bilden eine halbgeordnete Menge, falls man $H > H'$ setzt, wenn H' homomorph zu H über B ist. Obere Grenze ist H_s, der Bereich der s-Ideale, der durch

$$a_1 \frown \ldots \frown a_m \underset{s}{<} a \longleftrightarrow \text{für ein } \mu\colon a_\mu < a$$

definiert wird. Untere Grenze ist H_v, der Bereich der v-Ideale, der durch

$$a_1 \frown \ldots \frown a_m \underset{v}{<} a \longleftrightarrow \text{für alle } c \text{ und } x\colon c < x a_1, \ldots, c < x a_m \to c < x a$$

definiert wird.

Die Idealbereiche H werden durch einen Kennbuchstaben unterschieden. r sei eine Variable für diese Kennbuchstaben.

Ein Bereich B mit einem Idealbereich H_r heiße ein *r-Bereich.*

Definition 5. Eine Halbordnung S eines r-Bereiches B heiße *r-zulässig,* wenn S durch eine zulässige Halbordnung von H_r induziert wird.

Zu jeder r-zulässigen Halbordnung S von B gibt es Fortsetzungen auf H_r. Die Konjunktion aller Fortsetzungen auf H_r heiße die *minimale Fortsetzung* S'. Es gilt

$$S_1 \leqq S_2 \to S_1' \leqq S_2'.$$

Ist S eine r-zulässige Ordnung, dann gibt es nur die minimale Fortsetzung S' und S' ist eine Ordnung von H_r.

Definition 6. Ein r-Bereich B heißt *r-Hauptbereich,* wenn die Halbordnung R von B Konjunktion r-zulässiger Ordnungen von B ist.

Für einen r-Hauptbereich existiert der *r_a-Idealbereich,* der durch

$$a_1 \frown \ldots \frown a_m \underset{a}{<} a \longleftrightarrow \text{für alle } r\text{-zulässigen Ordnungen } S \text{ von } B\colon$$
$$\min(a_1, \ldots, a_m)\, S\, a$$

definiert wird. H_{r_a} ist homomorph zu H_r.

Definition 7. Für ein System $a_1, \ldots, a_m$ aus B und eine r-zulässige Halbordnung S von B heißt ein Element a *r-abhängig* von $a_1, \ldots, a_m$ bezügl. S, wenn für alle r-zulässigen Ordnungen $\overline{S}$ mit $\overline{S} > S$ gilt: $\min(a_1, \ldots, a_m)\, \overline{S}\, a$.

Um ein Kriterium für die r-Abhängigkeit zu erhalten, werde für jede r-zulässige Halbordnung S und jedes Paar $\alpha = a_1, a_2$ aus B die r-Erweiterung $S[\alpha]_r$ als Konjunktion aller r-zulässigen Halbordnungen $\overline{S}$ von B mit

$$S \leqq \overline{S} \tag{2.1}$$

$$a_1\, \overline{S}\, a_2 \tag{2.2}$$

definiert. Zur bequemeren Formulierung sei ferner gesetzt

$$\alpha \in S \longleftrightarrow a_1\, S\, a_2$$
$$\alpha^{+1} = a_1, a_2, \quad \alpha^{-1} = a_2, a_1.$$

Lemma. a ist genau dann r-abhängig von $a_1, \ldots, a_m$ bezügl. S, wenn gilt:

(2. 3) Es gibt Paare $\alpha_1, \ldots, \alpha_e$ aus B, so daß für jedes der 2^e-Systeme $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_e (\varepsilon = \pm 1)$: $a_1 \frown \ldots \frown a_m S[\alpha_1^{\varepsilon_1}, \ldots, \alpha_e^{\varepsilon_e}]_r a$.

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend, denn für r-zulässige Ordnungen $\overline{S}$ mit $\overline{S} > S$ und jedes Paar α gibt es ein $\varepsilon = \pm 1$ mit $\alpha^\varepsilon \in S$, also $S[\alpha^\varepsilon]_r < \overline{S}$. Daher folgt aus (2. 3) sofort $a_1 \frown \ldots \frown a_m \overline{S}' a$, d. h. $\min(a_1, \ldots, a_m) \overline{S} a$. Zum Beweis der Notwendigkeit sei (2. 3) nicht gültig. Durch Abzählung („Wohlordnung“) aller r-zulässigen Halbordnungen $\overline{S}$ läßt sich eine maximale Halbordnung $\overline{S}$, für die (2. 3) nicht gilt, konstruieren. Aus $\alpha^{+1} \bar{\in} \overline{S}$ und $\alpha^{-1} \bar{\in} \overline{S}$ würde die Gültigkeit von (2. 3) für $\overline{S}[\alpha^{+1}]_r$ und $\overline{S}[\alpha^{-1}]_r$ folgen, daraus aber die Gültigkeit für $\overline{S}$ selbst. Also ist $\overline{S}$ eine r-zulässige Ordnung, für die $\min(a_1, \ldots, a_m) \overline{S} a$ nicht gilt.

Satz 1. *Ein r-Bereich B (bezügl. R und G) ist genau dann ein r-Hauptbereich, wenn für alle Paare* $\alpha_1, \ldots, \alpha_e$ aus B gilt:

$$\bigcap_{\varepsilon = \pm 1}{}_{\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_e} R[\alpha_1^{\varepsilon_1}, \ldots, \alpha_e^{\varepsilon_e}]_r < R.$$

§ 3.

Überideale.

B sei ein Bereich (bezügl. R und G).

Definition 8. Ein minimaler distributiver Verbandsoberbereich V von B heißt ein *Überidealbereich* von B.

Jeder Überidealbereich von B enthält einen Idealbereich H_r und ist ein dualer Idealbereich von H_r. Wegen der Bedingung der Distributivität braucht aber nicht jeder duale Idealbereich eines Idealbereichs ein Überidealbereich zu sein. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ seien Variable für r-Ideale.

Die Überidealbereiche, die H_r enthalten, bilden — entsprechend zu § 2 — eine halbgeordnete Menge bezügl. der Homomorphie über H_r. Obere Grenze ist der r, s-Überidealbereich $V_{r,s}$, der durch

$$\mathfrak{a} \underset{r,s}{<} \mathfrak{a}_1 \smile \ldots \smile \mathfrak{a}_m \longleftrightarrow \text{für ein } \mu\colon \mathfrak{a} \underset{r}{<} \mathfrak{a}_\mu$$

definiert wird.

Die untere Grenze, der r, v-Überidealbereich $V_{r,v}$ wird definiert durch

$$\mathfrak{a} \underset{r,v}{<} \mathfrak{a}_1 \smile \ldots \smile \mathfrak{a}_m \longleftrightarrow \text{für alle } \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \text{ und } x\colon$$

$$x\mathfrak{a}_1 \frown \mathfrak{b} < \mathfrak{c}, \ldots, x\mathfrak{a}_m \frown \mathfrak{b} < \mathfrak{c} \rightarrow x\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b} < \mathfrak{c}.$$

Durch die Hinzufügung von „$\frown \mathfrak{b}$“ in dieser Definition gegenüber der Definition von H_v wird die Distributivität dieser Operation bezügl. $\smile$ erreicht, d. h. die geforderte verbandstheoretische Distributivität.

Die Überidealbereiche werden durch zwei Kennbuchstaben unterschieden. ϱ sei eine Variable für diese Kennbuchstabenpaare.

Ein Bereich B mit einem Überidealbereich V_ϱ heiße ein *ϱ-Bereich*.

Entsprechend zu § 2 lassen sich für ϱ-Bereiche die *ϱ-zulässigen* Halbordnungen S von B definieren und die *minimalen Fortsetzungen* S' auf V_ϱ. Für eine ϱ-zulässige Ordnung S gibt es nur die minimale Fortsetzung S' auf V_ϱ und S' ist eine Ordnung von V_ϱ. Die *ϱ-Hauptbereiche* werden entsprechend zu Definition 6 definiert. Für einen ϱ-Hauptbereich existiert der *ϱ_a-Überidealbereich*, der durch

$$a_1 \curlywedge \ldots \curlywedge a_m \underset{\varrho a}{<} b_1 \curlyvee \ldots \curlyvee b_n \longleftrightarrow \text{für alle } \varrho\text{-zulässigen Ordnungen } S:$$

$$\min(a_1, \ldots, a_m)\, S \max(b_1, \ldots, b_n)$$

definiert wird. $V_{\varrho a}$ ist homomorph zu V_ϱ.

Der Beweis des Lemmas aus § 2 läßt sich wörtlich auf ϱ-Bereiche übertragen. Als unmittelbare Folgerung ergibt sich

Satz 2. *Für ϱ-Hauptbereiche gilt* $a_1 \curlywedge \ldots \curlywedge a_m \underset{\varrho a}{<} b_1 \curlyvee \ldots \curlyvee b_n$ *genau dann, wenn es Paare $\alpha_1, \ldots, \alpha_e$ aus B gibt, so daß für jedes der 2^e Systeme*

$$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_e\ (\varepsilon = \pm 1) \text{ gilt: } a_1 \curlywedge \ldots \curlywedge a_m R\,[\alpha_1^{\varepsilon_1}, \ldots, \alpha_e^{\varepsilon_e}]'_\varrho\, b_1 \curlyvee \ldots \curlyvee b_n.$$

Satz 2 liefert für ϱ-Hauptbereiche B eine „konstruktive" Definition des ϱ_a-Überidealbereichs V_ϱ von B, d. h. eine Definition ohne Benutzung der ϱ-zulässigen Ordnungen von B. $V_{\varrho a}$ ist dualer Idealbereich eines Idealbereichs H von B und H ist durch Satz 2 ebenfalls konstruktiv definiert. Für halbgeordnete Gruppen entfallen die Untersuchungen über ϱ-Gruppen, denn für r-Hauptgruppen liefert schon das Lemma eine konstruktive Definition des r_a-Idealbereichs H_{r_a} und der duale v-Idealbereich von H_{r_a} ist *die* minimale Verbandsgruppe, die H_{r_a} enthält.

§ 4.

Reguläre Verbandsbereiche.

Die Halbordnung des ϱ-Überidealbereichs ist Konjunktion zulässiger Ordnungen. Das gilt nicht für alle distributiven Verbandsbereiche wie der 4-elementige Bereich $\{\wedge, a, b, \vee\}$ mit der durch $\wedge < a < \vee$, $\wedge < b < \vee$ definierten Halbordnung $<$ und der durch

$$x \wedge = \wedge, \quad xa = b, \quad xb = a, \quad x \vee = \vee$$

definierten Operatorengruppe $\{1, x\}$ zeigt.

Definition 9. Ein Verbandsbereich V heißt *regulär*, wenn V distributiv ist und für alle a, b und x, y gilt: $xa \curlywedge yb < xb \curlyvee ya$.

Jeder geordnete Bereich ist regulär und daher auch jeder Verbandsbereich, dessen Halbordnung Konjunktion von zulässigen Ord-

nungen ist. Der obige 4-elementige Verbandsbereich ist distributiv, aber nicht regulär wegen $xa \frown 1\,b = b$ und $xb \smile 1\,a = a$.

Für Verbandsgruppen G, in der die Elemente x, y von G selbst als Links- und Rechtsoperatoren auftreten, ist die Regularität äquivalent mit

(4.1) $$xa \frown by < xb \smile ay.$$

Diese Bedingung ist ferner äquivalent mit

(4.2) $$a \frown xax^{-1} \cdot = 1 \to a = 1.$$

Aus (4.2) folgt nämlich zunächst

(4.3) $$a \frown b < 1 \to a \frown xbx^{-1} < 1.$$

Beweis: $a \frown b < 1 \to 1 \smile a \dot{\frown} 1 \smile b = 1 \dot{\smile} a \frown b = 1$

$\to 1 \smile a \dot{\frown} x(1 \smile b)x^{-1} \frown x^{-1}(1 \smile a \dot{\frown} x(1 \smile b)x^{-1})x = 1$

$\to 1 \smile a \dot{\frown} 1 \smile xbx^{-1} = 1$

$\to a \frown xbx^{-1} < 1.$

Aus (4.3) folgt

(4.4) $$a^{-1} \frown xax^{-1} < 1$$

wegen $a^{-1} \frown a < 1$ und hieraus folgt (4.1) wegen

$$(xa \frown by)\,(b^{-1}x^{-1} \frown y^{-1}a^{-1}) < xab^{-1}x^{-1} \frown byy^{-1}a^{-1} < 1.$$

Die Äquivalenz der Bedingungen (4.1)—(4.4) läßt sich jetzt ohne Rechnung erschließen aus

Satz 3. *Die Halbordnung eines Verbandsbereiches V ist genau dann Konjunktion zulässiger Ordnungen von V, wenn V regulär ist.*

Beweis. Es ist nur noch zu zeigen, daß die Regularität hinreichend ist. Für jede zulässige Halbordnung S von V und jedes Paar $\boldsymbol{\beta} = b_1, b_2$ aus V werde dazu eine Relation S_β durch

$$a_1 S_\beta a_2 \longleftrightarrow \text{für alle } x, y\colon\ xa_1 \frown yb_1 S xa_2 \smile yb_2$$

definiert. Für S_β gilt

(4.5) $$S \leqq S_\beta,$$

denn $$a_1 S a_2 \to xa_1 S xa_2$$

$$\to xa_1 \frown yb_1 S xa_2 \smile yb_2,$$

(4.6) $$a_1 S_\beta a_2, \quad a_2 S_\beta a_3 \to a_1 S_\beta a_3,$$

denn $$xa_1 \frown yb_1 S xa_2 \smile yb_2, \quad xa_2 \frown yb_1 S xa_3 \smile yb_2$$

$$\to xa_1 \frown yb_1 S xa_2 \smile yb_2 \dot{\frown} yb_1 = xa_2 \frown yb_1 \dot{\smile} yb_2 \frown yb_1$$

$$S\, xa_3 \smile yb_2 \dot{\smile} yb_2 \frown yb_1 = xa_3 \smile yb_2,$$

(4.7) $$a_1 S_\beta a_2 \to za_1 S_\beta za_2,$$

denn $(xz)a_1 \frown yb_1\, S\,(xz)a_2 \smile yb_2 \to x(za_1) \frown yb_1\, S\, x(za_2) \smile yb_2$,

(4. 8) $$a\, S_\beta\, a_1, \quad a\, S_\beta\, a_2 \to a\, S_\beta\, a_1 \frown a_2,$$

denn $$xa \frown yb_1\, S\, xa_1 \smile yb_2, \quad xa \frown yb_1\, S\, xa_2 \smile yb_2$$
$$\to xa \frown yb_1\, S\, xa_1 \smile yb_2 \frown xa_2 \smile yb_2 = x(a_1 \frown a_2) \smile yb_2,$$

(4. 9) $$a_1\, S_\beta\, a, \quad a_2\, S_\beta\, a \to a_1 \smile a_2\, S_\beta\, a,$$

(dual zu (4. 8)).

S_β ist also eine zulässige Halbordnung von V. Ferner gilt ersichtlich

(4. 10) $$\alpha \in S_\beta \to \beta \in S_\alpha$$

(4. 11) $$\alpha \in S_\alpha \to \alpha \in S$$

und

(4. 12) $$\alpha^{-1} \in S_\alpha,$$

denn aus der Regularität von V folgt auch für jede zulässige Halbordnung S von V

$$xa_2 \frown ya_1\, S\, xa_1 \smile ya_2.$$

Durch Abzählung („Wohlordnung“) ist zu jedem Paar $\gamma = c_1, c_2$, für das $c_1 < c_2$ nicht gilt, eine maximale zulässige Halbordnung S mit $\gamma \bar{\in} S$ zu konstruieren. Wegen (4. 11) gilt $\gamma \bar{\in} S_\gamma$, d. h. $S_\gamma = S$. Daher ist S eine Ordnung, denn aus $\alpha^{-1} \bar{\in} S$ folgt nach (4. 12) $S \neq S_\alpha$, d. h. $\gamma \in S_\alpha$, also nach (4. 10) $\alpha \in S_\gamma = S$.

(Eingegangen am 10. September 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 3, S. 276—283 (1952).

Bemerkungen zu der Satzgruppe von Hilbert über Systeme elliptischer Differentialgleichungen.

Herrn Professor Dr. WOLFGANG HAACK zu seinem 50. Geburtstag gewidmet.

Von

Günter Hellwig in Berlin-Charlottenburg.

Bei dem Ausbau der Theorie zum Randwertproblem allgemeiner elliptischer Systeme von Differentialgleichungen [1]), die Herr W. HAACK angeregt und gemeinsam mit mir in Angriff genommen hat, ergaben sich grundsätzliche Schwierigkeiten, die erst durch den Beweis der folgenden Sätze behoben werden konnten.

Die ersten Untersuchungen über das Randwertproblem eines allgemeinen elliptischen Systems von partiellen Differentialgleichungen sind von HILBERT [2]) durchgeführt worden. In der Folgezeit wurden diese Ergebnisse immer wieder zum Ausgangspunkt von weiteren Untersuchungen gemacht. Die bei HILBERT vorliegende Problemstellung ist die folgende:

Es sei F ein von einer geschlossenen, stetig gekrümmten, doppelpunktslosen Kurve R begrenztes Gebiet der x, y-Ebene. Vorgegeben sind die zwei partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= p(x,y)\,u + q(x,y)\,v \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= k(x,y)\,u + l(x,y)\,v. \end{aligned} \tag{1}$$

Es sind p, q, k, l Funktionen von x, y, die in dem durch R abgeschlossenen Gebiet $F+R$ stetig differenzierbar sind. Gesucht wird ein Funktionenpaar $u(x,y)$, $v(x,y)$, welches in dem abgeschlossenen Gebiet $F+R$ stetig und im offenen Gebiet F stetig differenzierbar ist und dem System (1) *genügt, sowie auf dem Rande R die Randbedingung erfüllt:*

$$u(s) = f(s). \tag{2}$$

[1]) W. HAACK und G. HELLWIG: „Die Überführung des Randwertproblems für Systeme elliptischer Differentialgleichungen auf FREDHOLMsche Integralgleichungen." I., Math. Nachr., 4. Bd. (1950/51), S. 408—418.

[2]) D. HILBERT: „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen." Leipzig-Berlin 1924, S. 213—219.

Dabei ist $f(s)$ eine willkürlich vorgegebene zweimal stetig differenzierbare Funktion der Bogenlänge s.

Für die Lösbarkeit dieses Problems gab HILBERT[2]) den folgenden Satz:

I. *Wenn die partiellen Differentialgleichungen* (1) *außer $u \equiv 0$, $v \equiv 0$ kein Lösungssystem u, v besitzen derart, daß u auf der Randkurve R verschwindet, so besitzen sie notwendig ein Lösungssystem u, v derart, daß u auf der Randkurve R irgend vorgeschriebene Werte $f(s)$ annimmt.*

II. *Wenn es ein Lösungssystem u, v der partiellen Differentialgleichung* (1) *derart gibt, daß u auf R verschwindet und die Funktionen u, v nicht beide in F Null sind, so existiert ein Lösungssystem u, v, wobei u auf R die vorgeschriebenen Randwerte $f(s)$ annimmt, sicher immer dann, wenn $f(s)$ gewissen linearen Integralbedingungen in endlicher Anzahl genügt*[3]).

W. A. HURWITZ[4]) übertrug diese Satzgruppe auf kompliziertere Randbedingungen. Kürzlich hat H. BECKERT[5]) einen analogen Alternativsatz gewonnen für das Randwertproblem eines elliptischen Systems von n Gleichungen mit n gesuchten Funktionen.

Das Ziel dieser Arbeit ist es zu zeigen, daß der von HILBERT angegebene Satz den tatsächlich vorliegenden Gegebenheiten nicht gerecht wird. Es gibt nämlich kein System der Form (1), welches bei der Vorgabe $u = 0$ auf R nur die Lösung $u \equiv 0$, $v \equiv 0$ zuläßt.

Damit wird die Aussage I leer und es verbleibt die Aussage II. Diese liefert keine genauen Aussagen über die Lösbarkeit, da die Integralbedingungen in der Literatur meines Wissens nirgends angegeben sind und wie HILBERT zuerst bemerkte, auch unter besonderen Umständen identisch von allen Funktionen $f(s)$ erfüllt sein können. Vielmehr hatte man wohl angenommen, daß die Aussage I den „allgemeinen" Fall enthält. Man kann sich zunächst überzeugen, daß dies tatsächlich nicht der Fall sein kann.

Man teile die Systeme (1) mit $u = 0$ auf R in zwei Klassen:

1. Klasse. *Es ist* $\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial l}{\partial y} \equiv 0$ *in* F.

Wir setzen in (1) $u \equiv 0$. Dann verbleibt für v das System

$$-\frac{\partial v}{\partial y} = q(x, y)\, v, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = l(x, y)\, v. \tag{3}$$

[3]) Die Voraussetzungen über p, q, k, l und $f(s)$ sind etwas schwächer, als die von HILBERT angegebenen, doch ist dies für das Folgende unwesentlich.

[4]) W. A. HURWITZ: „Randwertaufgaben bei Systemen linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung." Diss. Göttingen 1910.

[5]) H. BECKERT: „Über lineare elliptische Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen." Math. Nachrichten, 5. Bd. (1951), S. 173—208.

Wegen der obigen Integrabilitätsrelation hat (3) unendlich viele Lösungen, die von $v \equiv 0$ verschieden sind. Das Randwertproblem (1) mit $u = 0$ auf R hat daher gewiß die Lösungen

$$u \equiv 0, \quad v = C e^{\int_{x_0, y_0}^{x, y} \{l(\xi, \eta)\, d\xi - q(\xi, \eta)\, d\eta\}} \tag{4}$$

Dabei ist (x_0, y_0) eine nach Belieben angenommene feste Stelle, (x, y) eine bewegliche Stelle in F. C ist eine willkürliche Konstante. Die Lösungsmenge (4) zeigt, daß die Forderung I nicht erfüllt ist.

2. Klasse. *Es ist* $\dfrac{\partial q}{\partial x} + \dfrac{\partial l}{\partial y} \not\equiv 0$ *in* F.

Es folgt aus dieser Forderung gewiß nicht, daß das Randwertproblem (1) mit $u = 0$ auf R nur die Lösung $u \equiv 0$, $v \equiv 0$ zuläßt: Es sei $F + R$ das durch den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ abgeschlossene Gebiet. Das System

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= -2\, x\, v \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= -2\, y\, v \end{aligned} \qquad \text{mit } u = 0 \text{ auf } R \tag{5}$$

hat die Lösungen: $u = C(x^2 + y^2 - r^2)$, $v = -C$. Dabei ist C eine willkürliche in beiden Ausdrücken gleiche Konstante. Bei (5) ist $\dfrac{\partial q}{\partial x} + \dfrac{\partial l}{\partial y} = -4$.

Um die Aussage I im allgemeinen Fall als leer zu erkennen, stellen wir zunächst einige Hilfsmittel bereit.

Hilfssatz 1. *Das Randwertproblem*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= a\, u + b\, v + c \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \bar{a}\, u + \bar{b}\, v + \bar{c} \end{aligned} \qquad \text{mit } u = f(s) \text{ auf } R \tag{6}$$

und $a, b, c, \bar{a}, b, \bar{c}$ *Funktionen von* x, y, *die in* $F + R$ *stetig differenzierbar sind, ist äquivalent dem System von Integralgleichungen*

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) = \iint_F \{u(x, y)\, K_{11}(\xi, \eta;\, x, y) + v(x, y)\, K_{12}(\xi, \eta;\, x, y)\}\, dx\, dy \\ + K_1(\xi, \eta) + L_1(\xi, \eta), \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} v(\xi, \eta) = \iint_F \left\{u(x, y)\, K_{21}(\xi, \eta;\, x, y) + v(x, y) \left(K_{22}(\xi, \eta;\, x, y) + \frac{1}{(F)}\right)\right\} dx\, dy \\ + K_2(\xi, \eta) + L_2(\xi, \eta) \end{aligned}$$

mit

$$K_{11}(\xi, \eta;\, x, y) = \frac{\partial\, G^{\mathrm{I}}(x, y;\, \xi, \eta)}{\partial x}\, a(x, y) + \frac{\partial\, G^{\mathrm{I}}(x, y;\, \xi, \eta)}{\partial y}\, \bar{a}(x, y),$$

$$K_{12}(\xi, \eta;\, x, y) = \frac{\partial\, G^{\mathrm{I}}}{\partial x}\, b + \frac{\partial\, G^{\mathrm{I}}}{\partial y}\, \bar{b}, \quad K_{21}(\xi, \eta;\, x, y) = \frac{\partial\, G^{\mathrm{II}}}{\partial x}\, \bar{a} - \frac{\partial\, G^{\mathrm{II}}}{\partial y}\, a, \tag{7a}$$

$$K_{22}(\xi, \eta;\, x, y) = \frac{\partial\, G^{\mathrm{II}}}{\partial x}\, \bar{b} - \frac{\partial\, G^{\mathrm{II}}}{\partial y}\, b;$$

$$K_1(\xi,\eta) = \iint_F \left\{ \frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial x}\, c + \frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial y}\, \bar{c} \right\} dx\, dy,$$

(7 b)
$$K_2(\xi,\eta) = \iint_F \left\{ \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial x}\, \bar{c} - \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial y}\, c \right\} dx\, dy,$$

$$L_1(\xi,\eta) = \oint_R f(s) \frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial n}\, ds, \quad L_2(\xi,\eta) = \oint_R f(s) \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial s}\, ds.$$

Dabei sind G^{I}, G^{II} die Greenschen *Funktionen erster Art bzw. zweiter Art im erweiterten Sinne. Sie sind Funktionen von x, y; ξ, η und besitzen die Form*

(8)
$$-\frac{1}{4\pi} \log\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\} + \gamma^{\mathrm{I,II}}(x, y; \xi, \eta),$$

wobei $\gamma^{\mathrm{I,II}}$ für jeden Punkt ξ, η aus F und für jeden Punkt x, y aus $F+R$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen bezüglich x, y darstellen. Sie erfüllen identisch in ξ, η die Differentialgleichungen

(9)
$$\frac{\partial^2 G^{\mathrm{I}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G^{\mathrm{I}}}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 G^{\mathrm{II}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G^{\mathrm{II}}}{\partial y^2} = \frac{1}{(F)}$$

und genügen bezüglich x, y den Randbedingungen

(10)
$$G^{\mathrm{I}}(x, y; \xi, \eta) = 0, \quad \frac{\partial G^{\mathrm{II}}(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} = 0 \quad \textit{mit } x, y \textit{ auf } R.$$

G^{II} genügt weiter der Bedingung

(11)
$$\iint_F G^{\mathrm{II}}(x, y; \xi, \eta)\, dx\, dy = 0.$$

Mit (F) ist dabei der Flächeninhalt von $F+R$, mit n die Richtung der inneren Normalen auf R bezeichnet.

Beweis. Für die Existenz solcher G^{I}, G^{II} sei auf [2]) verwiesen. Für den Fall $c = \bar{c} \equiv 0$ in (6) ist die Äquivalenz von (6) und (7) von Hilbert [2]) und W. A. Hurwitz [4]) gezeigt worden. Für das inhomogene System (6) folgt die Äquivalenz analog. Insbesondere folgt, daß jede Lösung von (7) in $F+R$ stetig und in F stetig differenzierbar ist, sowie auf R die Bedingung $u = f(s)$ erfüllt. Für den Fall, daß c und $\bar{c}$ nicht beide identisch verschwinden, ist dazu nur die aus der Potentialtheorie bekannte Bemerkung nötig, daß Integrale der Form

$$\iint_F \frac{\partial G^{\mathrm{I}}(x, y; \xi, \eta)}{\partial x}\, c(x, y)\, dx\, dy, \quad \iint_F \frac{\partial G^{\mathrm{II}}(x, y; \xi, \eta)}{\partial x}\, \bar{c}(x, y)\, dx\, dy$$

in $F+R$ stetig, in F stetig differenzierbar sind.

Wir stellen noch einen weiteren bekannten Hilfssatz bereit.

Hilfssatz 2. *Ist $E(x, y)$ in $F+R$ stetig, so stellen die folgenden Integrale stetige Funktionen von x, y dar und mit $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$*

gilt:

$$\iint_F \left(\iint_F \frac{E(x,y)}{r}\, dx\, dy \right) d\xi\, d\eta = \iint_F E(x,y) \left(\iint_F \frac{1}{r}\, d\xi\, d\eta \right) dx\, dy,$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \iint_F E(x,y) \log r\, dx\, dy = \iint_F \left(E(x,y) \frac{\partial}{\partial \xi} \log r \right) dx\, dy, \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \iint_F E(x,y) \log r\, dx\, dy = \iint_F \left(E(x,y) \frac{\partial}{\partial \eta} \log r \right) dx\, dy.$$

Hilfssatz 3. *Das Randwertproblem mit einer Normforderung, das heißt die Bestimmung einer Lösung u, v des Systems*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= a u + b v + c \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \bar{a} u + \bar{b} v + \bar{c} \end{aligned} \quad \text{mit } u = f(s) \text{ auf } R \text{ und } \iint_F v\, dx\, dy = 0 \tag{13}$$

ist äquivalent dem System von Integralgleichungen:

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta) &= \iint_F (u K_{11} + v K_{12})\, dx\, dy + K_1 + L_1 \\ v(\xi,\eta) &= \iint_F (u K_{21} + v K_{22})\, dx\, dy + K_2 + L_2 . \end{aligned} \tag{14}$$

Beweis. Stellt man diese Forderung für v, so fällt in (7) das Glied $\frac{1}{(F)}$ weg. Betrachtet man umgekehrt (14), so hat jede Lösung von (14) die Eigenschaft, daß $\iint_F v\, dx\, dy = 0$. Dies folgt aus (11) mit der Bemerkung, daß G^{II} symmetrisch in (ξ, η), (x, y) ist, indem man den Hilfssatz 2 anwendet. (Vgl. auch [4].)

Damit sind alle Hilfsmittel bereitgestellt, um den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 1. *Es gibt kein System* (1), *welches bei der Randvorgabe $u = 0$ auf R als einzige Lösung nur $u \equiv 0$, $v \equiv 0$ besitzt.*

Beweis. Der Beweis wird indirekt geführt.

Gegenannahme. *Es sei die Aussage von Satz 1 falsch. Dann gibt es wenigstens ein System* (1), *welches bei der Randvorgabe $u = 0$ auf R nur die Lösung $u \equiv 0$, $v \equiv 0$ zuläßt.* Dieses System sei

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= a u + b v \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \bar{a} u + \bar{b} v \end{aligned}, \quad u = 0 \text{ auf } R. \tag{15}$$

1. Schritt. Es darf sofort angenommen werden, daß b und $\bar{b}$ nicht beide in F identisch verschwinden. Wenn nämlich mit $b \equiv \bar{b} \equiv 0$ (15) ein solches System sein soll, so sind wir bereits zum Widerspruch gekommen, denn dieses hätte die Lösung $u = 0$, $v = 1$.

2. Schritt. Jetzt wenden wir den Hilfssatz 1 auf (15) an und erhalten das zu (15) äquivalente System von Integralgleichungen

$$(16)\qquad \begin{aligned} u(\xi,\eta) &= \int_F\int (u K_{11} + v K_{12})\, d\,x\, d\,y \\ v(\xi,\eta) &= \int_F\int \left(u K_{21} + v\left(K_{22} + \frac{1}{(F)}\right)\right) d\,x\, d\,y. \end{aligned}$$

Dieses hat nach unserer Annahme als einzige Lösung $u \equiv 0$, $v \equiv 0$.

3. Schritt. Es darf bei (16) noch die *Normbedingung* für v gestellt werden: $\int_F\int v\, d\,x\, d\,y = 0$, da das einzige Lösungssystem $u \equiv 0$, $v \equiv 0$ diese Forderung erfüllt.

Damit ist das *Randwertproblem* (15) *mit der zusätzlichen Normforderung* $\int_F\int v\, d\,x\, d\,y = 0$ nach Hilfssatz 3 äquivalent dem Integralgleichungssystem

$$(17)\qquad \begin{aligned} u(\xi,\eta) &= \int_F\int (u K_{11} + v K_{12})\, d\,x\, d\,y \\ v(\xi,\eta) &= \int_F\int (u K_{21} + v K_{22})\, d\,x\, d\,y. \end{aligned}$$

(17) läßt nach unserer Annahme nur die Lösung $u \equiv 0$, $v \equiv 0$ zu.

4. Schritt. Sei γ_0 eine von Null verschiedene reelle Zahl. Es wird das Randwertproblem (15) mit einer zusätzlichen Normforderung betrachtet:

$$(18)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= a u + b v \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \bar{a} u + \bar{b} v \end{aligned}, \quad u = 0 \text{ auf } R \text{ und } \int_F\int v\, d\,x\, d\,y = \gamma_0.$$

Dieses Problem darf nach Annahme keine Lösungen besitzen, denn es wäre v gewiß von $v \equiv 0$ verschieden.

5. Schritt. Und nun zeigen wir, daß das Randnormproblem (18) gewiß eine Lösung besitzt, und damit ist gezeigt, daß die Gegenannahme falsch war.

Seien $\hat{u}$, $\hat{v}$ neue gesuchte Funktionen:

$$(19)\qquad \begin{aligned} \hat{u} &= u \\ \hat{v} &= v - \frac{\gamma_0}{(F)} \end{aligned} \quad \text{mit } (F) \text{ Flächeninhalt von } F.$$

Mit diesen geht das Rand-Normproblem (18) über in

$$(20)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} &= a \hat{u} + b \hat{v} + c \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} &= \bar{a} \hat{u} + \bar{b} \hat{v} + \bar{c} \end{aligned}, \quad \hat{u} = 0 \text{ auf } R \text{ und } \int_F\int \hat{v}\, d\,x\, d\,y = 0$$

mit

$$c = \frac{b\,\gamma_0}{(F)}, \quad \bar{c} = \frac{\bar{b}\,\gamma_0}{(F)}.$$

Nach Schritt 1 ist (20) gewiß ein inhomogenes Problem, wobei c und $\bar{c}$ nicht beide in F identisch verschwinden.

Nach Hilfssatz 3 ist (20) äquivalent dem Integralgleichungssystem

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi,\eta) &= \iint_F (\hat{u}\,K_{11} + \hat{v}\,K_{12})\,dx\,dy + K_1 \\ \hat{v}(\xi,\eta) &= \iint_F (\hat{u}\,K_{21} + \hat{v}\,K_{22})\,dx\,dy + K_2. \end{aligned} \tag{21}$$

Das homogene Integralgleichungssystem ($K_1 \equiv 0$, $K_2 \equiv 0$) läßt nach Schritt 3 nur die Lösung $\hat{u} \equiv 0$, $\hat{v} \equiv 0$ zu. Könnten wir bei (21) die Fredholmschen Sätze unmittelbar anwenden, so hätte (21) genau eine Lösung $\hat{u}$, $\hat{v}$ und wegen der eineindeutigen Zuordnung (19) hätten wir eine Lösung des Rand-Normproblem (18) gefunden, was aber nicht der Fall sein darf.

Aus (7a) ersieht man, daß die Kerne $K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$ bei gleichzeitiger Annäherung der Punkte (x, y) und (ξ, η) zu einem gemeinsamen Grenzwert eine Singularität erster Ordnung besitzen. Man bringt in bekannter Weise (21) auf eine Integralgleichung. Man betrachtet dazu ein zu F kongruentes geeignet außerhalb von F liegendes Gebiet F' und bezeichnet mit ξ', η' den Punkt, der in $\hat{F}$ dem Punkt ξ, η entspricht. In der Vereinigungsmenge $F + F'$ definiert man dann Funktionen

$$z(\xi,\eta) = \begin{cases} \hat{u}(\xi,\eta) & \text{für } (\xi,\eta) \text{ aus } F \\ \hat{v}(\xi',\eta') & \text{für } (\xi,\eta) \text{ aus } F', \end{cases} \tag{22}$$

$$\mathfrak{K}(\xi_1,\eta_1;\,\xi_2,\eta_2) = \begin{cases} K_{11}(\xi_1,\eta_1;\,\xi_2,\eta_2) \text{ für } (\xi_1,\eta_1),\,(\xi_2,\eta_2) \text{ aus } F. \\ \text{Analog für } K_{12}, K_{21}, K_{22}. \end{cases} \tag{22 a}$$

Entsprechend wie in (22) definiert man ein $K(\xi, \eta)$ aus K_1 und K_2. (21) geht dann über in

$$z(\xi,\eta) = \iint_{F+F'} z(x,y)\,\mathfrak{K}(\xi,\eta;\,x,y)\,dx\,dy + K(\xi,\eta). \tag{23}$$

Nach zweimaliger Iteration entsteht eine Integralgleichung mit stetigem Kern. Während die homogene Integralgleichung (23) ($K \equiv 0$) als einzige Lösung nur $z \equiv 0$ besitzt, kann dies von der zweifach iterierten homogenen Gleichung nicht mehr behauptet werden. Man erschließt jedoch die Existenz einer eindeutigen Lösung von (23) durch den folgenden

Hilfssatz. Wenn bei der Integralgleichung zweiter Art

$$u(\xi,\eta) = \iint u(x,y)\,K(\xi,\eta;\,x,y)\,dx\,dy + f(x,y) \tag{24}$$

der n-fach iterierte Kern K_n stetig ist, so gelten für (24) bereits die FREDHOLMschen Sätze [6]).

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Schlußbemerkung. Die Formulierung von Satz 1 in Form einer Negation wurde nur zum Zwecke eines Widerspruchsbeweises gewählt. Vielmehr soll Satz 1 jetzt in positiver Form ausgesprochen werden.

Satz 2. *Jedes System* (1) *mit* $u = 0$ *auf* R *hat gewiß ein Lösungssystem* u_H, v_H, *wobei* u_H *auf* R *verschwindet und* u_H, v_H *nicht beide in* F *identisch verschwinden und damit sicher die unendlich vielen Lösungen* $u = C u_H$, $v = C v_H$. *Dabei ist* C *eine willkürliche Konstante.*

Es erhebt sich die Frage, wie man mit diesem Tatbestand zu einer befriedigenden Theorie des Randwertproblems eines elliptischen Systems gelangen kann. Daß dies erreicht werden kann, wird an anderer Stelle gezeigt.

[6]) Man vergleiche etwa HELLINGER-TOEPLITZ: „Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten", Encyklopädie d. math. Wiss. II 3/2, S. 1386 oder W. SCHMEIDLER: „Integralgleichungen mit Anwendung in Physik und Technik", Leipzig 1950, S. 563. Dort ist der Satz ausgesprochen für vollstetige Kernmatrizen, doch ist diese Formulierung nach Satz 40 (S. 169) gleichwertig der oben angegebenen.

(Eingegangen am 2. August 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 3. S. 284—287 (1952).

Abschätzungen bei Kreisteilungspolynomen und daraus hergeleitete Bedingungen für die kleinsten Primzahlen gewisser arithmetischer Folgen.

Von

Hans-Joachim Kanold in Gießen.

Wir bezeichnen mit m eine natürliche Zahl >1 und mit $F_m(x)$ das m-te Kreisteilungspolynom, dessen nur einfache Nullstellen genau die primitiven m-ten Einheitswurzeln sind. Wir gehen aus von der bekannten Formel

$$F_m(x) = \prod_{t \mid m} (x^t - 1)^{\mu\left(\frac{m}{t}\right)} \tag{1}$$

und setzen

$$m = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}; \quad \sqrt[m]{x^{p_1 p_2 \cdots p_k}} = z. \tag{2}$$

Dann folgt aus (1)

$$F_m(x) = \prod_{d \mid p_1 \cdots p_k} (z^d - 1)^{\mu\left(\frac{p_1 \cdots p_k}{d}\right)} = \frac{\prod_{d'} (1 - z^{d'})}{\prod_{d''} (1 - z^{d''})} = F_{p_1 \cdots p_k}(z). \tag{3}$$

Dabei durchlaufen d' und d'' zusammen alle Teiler von $p_1 p_2 \ldots p_k$ und die Anzahl der Primteiler von d' bzw. d'' ist gleich k bzw. gleich $k-1$ oder eine gerade Zahl weniger. Wir beachten nun, daß

$$F_{p_1 \cdots p_k}(z) = z^{(p_1-1)\cdots(p_k-1)} F_{p_1 \cdots p_k}\left(\frac{1}{z}\right) \tag{4}$$

gilt. Wegen (2), (3) und (4) können wir uns auf quadratfreie m und auf $|z| \leqq 1$ beschränken. Der Vollständigkeit halber wollen wir noch erwähnen:

$$F_m(0) = 1; \; F_m(1) = \begin{cases} p_1 \text{ für } k = 1 \\ 1 \text{ für } k > 1 \end{cases}. \tag{5}$$

Aus (3) ergibt sich

$$F_{p_1 \cdots p_k}(z) = \prod_{d \mid p_1 \cdots p_{k-1}} \left(\frac{(z^{p_k})^d - 1}{z^d - 1} \right)^{\mu\left(\frac{p_1 \cdots p_{k-1}}{d}\right)} = \frac{F_{p_1 \cdots p_{k-1}}(z^{p_k})}{F_{p_1 \cdots p_{k-1}}(z)}. \tag{6}$$

Diese Formel wird uns zu einigen Abschätzungen dienen. Wir beweisen dazu zunächst den

Hilfssatz 1. *Es sei* $0 < x \leqq \frac{1}{2}$. *Dann gilt*

$$\prod_{\varkappa=2}^{k} \frac{1 - x^{p_1 p_\varkappa}}{1 - x^{p_\varkappa}} < 1 + \frac{8x}{23}. \tag{7}$$

Beweis. Es ist

$$\prod = \prod_{\varkappa=2}^{k} (1 + x^{p_\varkappa} + x^{2p_\varkappa} + \cdots + x^{(p_1-1)p_\varkappa}) \leqq \prod_{\varkappa=2}^{k} (1 + (p_1 - 1)\, x^{p_\varkappa}).$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ und $p_\varkappa \geqq p_1 + 2\varkappa - 3$ annehmen. Dann folgt

$$(8) \quad \begin{cases} \prod < \prod_{\varkappa=2}^{k} (1 + (p_1 - 1)\, x^{p_1 - 1}\, x^{2\varkappa - 3}\, x) \leqq \prod_{\varkappa=2}^{k} \left(1 + \frac{p_1 - 1}{2^{p_1 - 1}} \cdot \frac{x}{2^{2\varkappa-3}}\right) \\ \leqq \prod_{\varkappa=2}^{k} \left(1 + \frac{x}{2^{2(\varkappa-1)}}\right) < \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{4^\lambda}\right). \end{cases}$$

Bekanntlich ist

$$(9) \quad \prod_{\lambda=1}^{l} \left(1 + \frac{x}{4^\lambda}\right) = 1 + \frac{x}{4} + \sum_{\lambda=2}^{l} \frac{x}{2} \left(\frac{x}{4^2} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{x}{4^3} + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(\frac{x}{4^\lambda} + \frac{1}{4}\right) < 1 + \frac{x}{4} + \sum_{\lambda=2}^{l} \frac{x}{4} \left(\frac{x}{4^2} + \frac{1}{4}\right)^{\lambda - 1}.$$

Wir erhalten somit

$$(10) \quad \prod < 1 + \frac{x}{4} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(\frac{x}{4^2} + \frac{1}{4}\right)^{\lambda-1} \leqq 1 + \frac{x}{4} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(\frac{9}{32}\right)^{\lambda-1} = 1 + \frac{8x}{23}.$$

Hilfssatz 2. *Es sei* $0 < x \leqq \frac{1}{2}$. *Dann ist*

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} < \frac{1-x}{1-x^{p_1}} < F_{p_1 \dots p_k}(x) < \frac{1-x}{1-x^{p_1}} \left(1 + \frac{8x}{23}\right) \leqq 1 - \frac{10x}{23} \\ \qquad\qquad \textit{für gerades } k \geqq 2; \\ 1 + \frac{10x}{23} < \frac{1-x^{p_1}}{1-x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{8x}{23}} < F_{p_1 \dots p_k}(x) \leqq \frac{1-x^{p_1}}{1-x} < 2 \textit{ für ungerad. } k; \end{cases}$$

dabei ist $p_1 = \operatorname{Min} p_\varkappa$ *für* $\varkappa = 1, \dots, k$; ($p_\varkappa$ = Primzahl).

Beweis. Für $k = 1$ ist $F_{p_1}(x) = \frac{1-x^{p_1}}{1-x}$. Aus (6) und (7) ergibt sich

$$\frac{1-x}{1-x^{p_1}} < F_{p_1 p_2}(x) = \frac{1-x^{p_1 p_2}}{1-x^{p_1}} \cdot \frac{1-x}{1-x^{p_2}} < \frac{1-x}{1-x^{p_1}} \left(1 + \frac{8x}{23}\right) \leqq \frac{1 + \frac{8x}{23}}{1+x} \leqq 1 - \frac{10x}{23}.$$

Es sei nun $k - 1 \geqq 2$, gerade und

$$\frac{1-x}{1-x^{p_1}} < F_{p_1 \dots p_{k-1}}(x) \leqq \frac{1-x}{1-x^{p_1}} \prod_{\varkappa=2}^{k-1} \frac{1-x^{p_1 p_\varkappa}}{1-x^{p_\varkappa}}.$$

Dann folgt aus (6)

$$(12) \quad \frac{1-x^{p_1}}{1-x} \prod_{\varkappa=2}^{k} \frac{1-x^{p_\varkappa}}{1-x^{p_1 p_\varkappa}} < F_{p_1 \dots p_k}(x) < \frac{1-x^{p_1}}{1-x} \cdot \frac{1-x^{p_k}}{1-x^{p_1 p_k}} \prod_{\varkappa=2}^{k-1} \frac{1-x^{p_1 p_\varkappa p_k}}{1-x^{p_\varkappa p_k}}.$$

Nach (7) ist nun

$$\prod_{x=2}^{k-1} \frac{1-(x^{p_k})^{p_1 p_x}}{1-(x^{p_k})^{p_x}} < 1 + \frac{8x^{p_k}}{23} < 1 + x^{p_k} + \cdots + x^{(p_1-1)p_k},$$

d. h. $F_{p_1 \dots p_k}(x) < \frac{1-x^{p_1}}{1-x}$.

Ebenso schließen wir aus der Annahme $k-1 \geqq 3$, ungerade und

$$\frac{1-x^{p_1}}{1-x} \prod_{x=2}^{k-1} \frac{1-x^{p_x}}{1-x^{p_1 p_x}} < F_{p_1 \dots p_k}(x) < \frac{1-x^{p_1}}{1-x},$$

daß

$$(13)\quad \frac{1-x}{1-x^{p_1}} \cdot \frac{1-x^{p_1 p_k}}{1-x^{p_k}} \prod_{x=2}^{k-1} \frac{1-x^{p_x p_k}}{1-x^{p_1 p_x p_k}} < F_{p_1 \dots p_k}(x) < \frac{1-x}{1-x^{p_1}} \prod_{x=2}^{k} \frac{1-x^{p_1 p_x}}{1-x^{p_x}}$$

gilt; daraus folgt

$$\frac{1-x}{1-x^{p_1}} < F_{p_1 \dots p_k}(x) < \frac{1-x}{1-x^{p_1}} \left(1 + \frac{8x}{23}\right).$$

Satz 1. *Es sei* $m = \prod_{x=1}^{k} p_x^{a_x} > 6$ *und* q_1 *die kleinste Primzahl der Restklasse* 1 (mod m). *Dann ist*

$$(14)\quad \begin{cases} q_1 \leqq 2^{\varphi(m)} - m, & \text{wenn } m \text{ ungerade;} \\ q_1 \leqq 2^{\varphi(m)} - \frac{m}{2}, & \text{wenn } m \equiv 2 \pmod 4; \\ q_1 \leqq 2^{\varphi(m)} - \frac{m}{2^{a_1}}, & \text{wenn } k \text{ gerade und } p_1 = 2 \text{ ist.} \end{cases}$$

Beweis. Nach einem früheren Ergebnis [1]) gilt

$$(15)\qquad q_1 \leqq F_m(\pm 2).$$

Aus (3) und (4) erhalten wir

$$F_m(\pm 2) = F_{p_1 \dots p_k}\left((\pm 2)^{\frac{m}{p_1 \cdots p_k}}\right) = 2^{\varphi(m)}\, F_{p_1 \dots p_k}\left((\pm 2)^{\frac{-m}{p_1 \cdots p_k}}\right).$$

Ist nun k gerade, so liefert (11)

$$(16)\qquad q_1 \leqq 2^{\varphi(m)}\, F_{p_1 \dots p_k}\left(2^{\frac{-m}{p_1 \cdots p_k}}\right) < 2^{\varphi(m)}.$$

Ist m ungerade, so ist $2^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$, also $q_1 \leqq 2^{\varphi(m)} - m$.

Ist $m \equiv 2^{a_1} \pmod{2^{a_1+1}}$, so ist $2^{\varphi(m)} \equiv q_1 \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ \frac{m}{2^{a_1}}\right)$, also $q_1 \leqq 2^{\varphi(m)} - \frac{m}{2^{a_1}}$. Für ungerades k und ungerades $p_1 p_2 \dots p_k$ gilt nach (3)

$$(17)\quad F_{p_1 \dots p_k}(-z) = \frac{\prod_{d'}(1+z^{d'})}{\prod_{d''}(1+z^{d''})} = \prod_{d'} \frac{1-z^{2d'}}{1-z^{d'}} \cdot \prod_{d''} \frac{1-z^{d''}}{1-z^{2d''}} = F_{2p_1 \dots p_k}(z).$$

[1]) H.-J. Kanold, Sätze über Kreisteilungspolynome und ihre Anwendungen auf einige zahlentheoretische Probleme I, J. f. reine u. angew. Math. 187 (1949), 169—182, Abschnitt I, (35).

Somit haben wir $q_1 \leqq 2^{\varphi(m)} F_{p_1 \dots p_k}\left(-2^{\frac{-m}{p_1 \dots p_k}}\right) = 2^{\varphi(m)} F_{2p_1 \dots p_k}\left(2^{\frac{-m}{p_1 \dots p_k}}\right)$.

Daraus ergibt sich nach (11), weil die Anzahl der Primteiler von $2p_1 \dots p_k$ gleich $k+1$ ist, daß wiederum $q_1 < 2^{\varphi(m)}$ sein muß. Für ungerades k und $m \equiv 2 \pmod 4$ beachten wir, daß

$$2^{\varphi(m)} = 2^{\varphi\left(\frac{m}{2}\right)} \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ \frac{m}{2}\right)$$

ist. $\frac{m}{2}$ ist nun ungerade, also gibt es nach dem Vorangehenden eine Primzahl $q_1 \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ \frac{m}{2}\right)$; $q_1 \leqq 2^{q\left(\frac{m}{2}\right)} - \frac{m}{2}$.

Für dieses q_1 muß aber auch erfüllt sein

$$q_1 \equiv 1 \pmod m;\ q_1 \leqq 2^{\varphi(m)} - \frac{m}{2}. \tag{18}$$

Damit ist (14) bewiesen.

Satz 2. *Es sollen m und q_1 die gleiche Bedeutung wie in Satz 1 haben. Dann ist immer $q_1 < \frac{5}{4} \cdot 2^{\varphi(m)}$.*

Beweis. Wir können $p_1 = 2$, $\alpha_1 > 1$, k ungerade annehmen. Dann ist $\frac{m}{2p_1 \dots p_k}$ gerade und $F_m(2) = F_m(-2) = 2^{\varphi(m)} F_{2p_2 \dots p_k}\left(4^{\frac{-m}{4p_2 \dots p_k}}\right)$. Nach (11) und (15) erhalten wir, wenn wir zur Abkürzung $\frac{m}{4p_1 \dots p_k} = m'$ setzen

$$q_1 \leqq 2^{\varphi(m)} \frac{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^{m'}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{m'}} \leqq \frac{5}{4} 2^{\varphi(m)}. \tag{19}$$

$q_1 > 6$ und $q_1 = \frac{2^{\varphi(m)}}{4} 5$ ist unmöglich, weil sonst $5 \mid q_1$ wäre.

Daß (14) und (19) in gewisser Weise bestmögliche Abschätzungen sind, zeigt das Beispiel $m = 8$. Wir haben dann $\varphi(8) = 4$; $m' = 2$. Aus (19) folgt also $q_1 \leqq 2^4 \frac{1 - \frac{1}{256}}{1 - \frac{1}{16}} = 17$.

(Eingegangen am 3. Oktober 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 3, S. 288—291 (1952).

Konvergenzfaktoren beim Euler-Knoppschen Limitierungsverfahren.

Von

Alexander Peyerimhoff in Gießen.

In dieser Arbeit werden einige Fragen über Konvergenzfaktoren beim EULER-KNOPPschen Limitierungsverfahren (im folgenden mit E^k bezeichnet) untersucht. Es handelt sich dabei allgemein um die Frage, wie eine Zahlenfolge $\{\varepsilon_\nu\}$ beschaffen sein muß, damit die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \varepsilon_\nu$ für alle E^k-limitierbaren Folgen $\{s_\nu\}$ konvergiert. Wenn $\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \varepsilon_\nu$ konvergiert, muß $s_\nu \varepsilon_\nu = o(1)$ sein, und aus dieser Tatsache folgt, daß für die ε_ν eine gewisse Größenbeschränkung der Form $\varepsilon_\nu = O(d_\nu)$ vorhanden ist. Wir werden im folgenden einige spezielle Folgen $\{\varepsilon_\nu\}$, und zwar insbesondere solche, welche die Größenbeschränkung erreichen, untersuchen [1]).

Eine Folge $\{s_\nu\}$ ist genau dann E^k-limitierbar ($k > 0$), wenn

$$\sigma_n = \frac{1}{q^n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (q-1)^{n-\nu} s_\nu \qquad (q = 2^k > 1) \tag{1}$$

für $n \to \infty$ konvergiert. Aus (1) folgt, daß

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} q^\nu (1-q)^{n-\nu} \sigma_\nu \tag{2}$$

ist [2]).

Die genaue Größenbeschränkung der E^k-limitierbaren Folgen ist

$$s_n = o((2q-1)^n), \tag{3}$$

---

[1]) Wenn ein permanentes Matrixverfahren $A = (a_{\mu\nu})$ einen Mittelwertsatz der Form

$$(*) \quad \left| \sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu \right| \leqq K \max_{0 \leqq \mu \leqq n} \left| \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} s_\nu \right| \quad (0 \leqq n \leqq m,\ a_{nn} \neq 0,\ a_{n\nu} = 0 \text{ für } \nu > n)$$

erfüllt, dann kann man die Frage nach den Konvergenzfaktoren für die A-limitierbaren Folgen vollständig beantworten (vgl. A. PEYERIMHOFF [4] und K. ZELLER [5]). Die E^k-Verfahren besitzen aber keinen derartigen Mittelwertsatz (vgl. Fußnote [3])).

[2]) Vgl. K. KNOPP [3], S. 525 und G. H. HARDY [1], 8. 3.

d. h. (3) gilt für jede E^k-limitierbare Folge $\{s_n\}$, aber für keine unbeschränkte Folge $\{\lambda_n\}$ kann die rechte Seite von (3) durch $o\left(\frac{1}{\lambda_n}(2q-1)^n\right)$ ersetzt werden [3]).

Wenn $\{\varepsilon_\nu\}$ so beschaffen ist, daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \varepsilon_\nu$ für alle E^k-limitierbaren Folgen $\{s_\nu\}$ konvergiert ($k>0$, fest), dann ist $s_\nu \varepsilon_\nu = o(1)$ für alle diese Folgen $\{s_\nu\}$. Wegen (3) muß dann

$$\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{(2q-1)^n}\right). \tag{4}$$

erfüllt sein (vgl. A. Peyerimhoff [4], S. 38).

Aus (3) *folgt zunächst die einfache Tatsache, daß* $\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \varepsilon_\nu$ *für alle* E^k*-limitierbaren* $\{s_\nu\}$ *konvergiert, wenn* $\varepsilon_n = \frac{\alpha_n}{(2q-1)^n}$ *mit* $\sum_n |\alpha_n| < +\infty$ *ist.*

Schwieriger ist die Frage, ob es Konvergenzfaktoren ε_ν gibt, welche die in (4) angegebene Größenordnung erreichen. Eine Antwort auf diese Frage gibt der

Satz 1. *Für alle* E^k*-limitierbaren Folgen* $\{s_\nu\}$ ($k>0$, *fest*) *konvergiert die Reihe* $\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{s_\nu}{(2q-1)^\nu}\right)$.

Zum Beweise benötigen wir den folgenden

Hilfssatz. *Wenn* $-1<x<0$ *ist, dann gilt für alle ganzen Zahlen* $\varrho \geqq 0$ *und* $\mu \geqq 0$ *die Ungleichung*

$$\left|\sum_{\nu=\varrho+1}^{\infty}\binom{\nu+\mu}{\nu}x^\nu\right| \leqq \binom{\varrho+1+\mu}{\varrho+1}|x|^{\varrho+1}. \tag{5}$$

Beweis. $\sum_{\nu=\varrho+1}^{\infty}\binom{\nu+\mu}{\nu}x^\nu$ ist ein Reststück der Taylorentwicklung der Funktion $\frac{1}{(1-x)^{\mu+1}}$ und kann deshalb mittels der Lagrangeschen Form des Restgliedes in der Gestalt

$$\sum_{\nu=\varrho+1}^{\infty}\binom{\nu+\mu}{\nu}x^\nu = \frac{x^{\varrho+1}}{(\varrho+1)!}\frac{d^{\varrho+1}}{d\xi^{\varrho+1}}\frac{1}{(1-\xi)^{\mu+1}}\Big|_{\xi=\vartheta x} \text{ mit } 0<\vartheta<1$$

dargestellt werden. Wegen

$$\frac{d^{\varrho+1}}{d\xi^{\varrho+1}}\frac{1}{(1-\xi)^{\mu+1}} = (\varrho+1)!\binom{\varrho+1+\mu}{\varrho+1}\frac{1}{(1-\xi)^{\mu+\varrho+1}}$$

[3]) Wenn ein permanentes Matrixverfahren $A=(a_{n\nu})$ den in Fußnote [1]) angegebenen Mittelwertsatz (*) erfüllt, dann wird die genaue Größenbeschränkung der durch A zu Null limitierbaren Folgen durch $o\left(\frac{1}{a_{nn}}\right)$ gegeben (vgl. Jurkat u. Peyerimhoff [2]). Beim E^k-Verfahren ist $\frac{1}{a_{nn}} = q^n$. Wegen (3) kann also (*) nicht erfüllt sein.

folgt daraus, wenn man noch beachtet, daß wegen $x<0$ die Ungleichung $\left|\frac{1}{1-\vartheta x}\right| \leqq 1$ gilt, gerade die Behauptung (5).

Beweis des Satzes 1. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit genügt es (wegen der Konvergenz von $\sum_n \frac{1}{(2q-1)^n}$), E^k-limitierbare Folgen $\{s_\nu\}$ mit $\sigma_n = o(1)$ zu untersuchen. Wegen (2) und $\left|\frac{1-q}{2q-1}\right| < 1$ ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{s_\nu}{(2q-1)^\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{(2q-1)^\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} (1-q)^{\nu-\mu} q^\mu \sigma_\mu$$

$$= \sum_{\mu=0}^{n} q^\mu \sigma_\mu \sum_{\nu=\mu}^{n} \binom{\nu}{\mu} \frac{(1-q)^{\nu-\mu}}{(2q-1)^\nu}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{n} \frac{q^\mu \sigma_\mu}{(2q-1)^\mu} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+\mu}{\nu} \left(\frac{1-q}{2q-1}\right)^\nu$$

$$- \sum_{\mu=0}^{n} \frac{q^\mu \sigma_u}{(2q-1)^\mu} \sum_{\nu=n-\mu+1}^{\infty} \binom{\nu+\mu}{\nu} \left(\frac{1-q}{2q-1}\right)^\nu = \mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

Es ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+\mu}{\nu} \left(\frac{1-q}{2q-1}\right)^\nu = \left(\frac{2q-1}{3q-2}\right)^\mu \frac{2q-1}{3q-2}$ und deshalb

$$\mathrm{I} = \frac{2q-1}{3q-2} \sum_{\mu=0}^{n} \left(\frac{q}{3q-2}\right)^\mu \sigma_\mu \to \frac{2q-1}{3q-2} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{q}{3q-2}\right)^\mu \sigma_\mu$$

für $n \to \infty$, da $\left|\frac{q}{3q-2}\right| < 1$ ist.

Der Satz 1 ist bewiesen, wenn gezeigt wird, daß $\mathrm{II} \to 0$ für $n \to \infty$, daß also

$$\overline{\operatorname{fin}}_n \sum_{\mu=0}^{n} \left(\frac{q}{2q-1}\right)^\mu \left| \sum_{\nu=n-\mu+1}^{\infty} \binom{\nu+\mu}{\nu} \left(\frac{1-q}{2q-1}\right)^\nu \right| < +\infty \tag{6}$$

ist, denn es ist $\sigma_n = o(1)$ und

$$\left(\frac{q}{2q-1}\right)^\mu \sum_{\nu=n-\mu+1}^{\infty} \binom{\nu+\mu}{\nu} \left(\frac{1-q}{2q-1}\right)^\nu \to 0$$

für $n \to \infty$ und jedes feste μ.

Die Bedingung (6) ist erfüllt; nach (5) ist nämlich

$$\left| \sum_{\nu=n-\mu+1}^{\infty} \binom{\nu+\mu}{\nu} \left(\frac{1-q}{2q-1}\right)^\nu \right| \leqq \binom{n+1}{\mu} \left|\frac{1-q}{2q-1}\right|^{n+1-\mu}, \tag{7}$$

da $-1 < \frac{1-q}{2q-1} < 0$ ist. Wegen (7) ist (6) richtig, da

$$\sum_{\mu=0}^{n} \left(\frac{q}{2q-1}\right)^\mu \binom{n+1}{\mu} \left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{n+1-\mu} \leqq \left(\frac{2q-1}{2q-1}\right)^{n+1} = 1$$

ist.

Bemerkenswert ist, daß die Zahlen $\varepsilon_n = \frac{(-1)^n}{(2q-1)^n}$ *keine Konvergenzfaktoren sind.* Die Folge $s_n = \frac{(-1)^n (2q-1)^n}{n+1}$ ist nämlich E^k-limitierbar. Dies folgt aus

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (q-1)^{n-\nu} \frac{(1-2q)^\nu}{\nu+1} = \frac{1}{(n+1)} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+1}{\nu+1} (q-1)^{n-\nu} (1-2q)^\nu = \frac{O(q^n)}{n+1}.$$

Für diese Folge gilt aber

$$\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu \varepsilon_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu (2q-1)^\nu}{\nu+1} \frac{(-1)^\nu}{(2q-1)^\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu+1} \to +\infty \text{ für } n \to \infty.$$

Eine Reihe $\sum a_\nu$ heißt E^k-summierbar, wenn ihre Teilsummen $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ E^k-limitierbar sind. Aus Satz 1 können wir über E^k-summierbare Reihen den folgenden Satz ableiten.

Satz 2. *Für alle* E^k*-summierbaren Reihen* $\sum a_\nu$ *konvergiert die Reihe* $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{(2q-1)^\nu}$.

Beweis. Es ist $\sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu}{(2q-1)^\nu} = \frac{s_n}{(2q-1)^n} + \frac{2q-2}{2q-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{s_\nu}{(2q-1)^\nu} = \text{I}+\text{II}$.

Für $n \to \infty$ konvergiert I wegen (3) und II wegen Satz 1.

Literatur.

Hardy, G. H.

[1] Divergent series. Oxford 1949.

Jurkat, W. und Peyerimhoff, A.

[2] Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. Math. Zeitschr. **55** (1952), S. 92—108.

Knopp, K.

[3] Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Springer 1947.

Peyerimhoff, A.

[4] Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math. Zeitschr. **55** (1952), S. 23—54.

Zeller, K.

[5] Abschnittskonvergenz in FK-Räumen. Math. Zeitschr. **55** (1952), S. 55—70.

(Eingegangen am 12. Oktober 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 3, S. 292–298 (1952).

Ergänzungsgleichheit k-dimensionaler Polyeder.

Von

H. Hadwiger in Bern.

I. Zerlegungsgleichheit.

$A, B, C, \ldots$ sollen abgeschlossene und eigentliche[1]) Polyeder des k-dimensionalen euklidischen Raumes R_k bezeichnen. Unter $A + B$ wird wie üblich ein Polyeder verstanden, das sich im Sinne der Elementargeometrie in die beiden Polyeder A und B zerlegen läßt, so daß also A und B höchstens Randpunkte, jedoch keine inneren Punkte gemeinsam haben. Alle im folgenden vorkommenden Polyederadditionen sind stets stillschweigend an diese Konvention gebunden. — Es sei weiter G eine Bewegungsgruppe im R_k, die bis auf die Bedingung $T < G$, wonach die Translationsgruppe T als Untergruppe in G enthalten sein soll, beliebig gewählt werden kann. — Zwei Polyeder A und B heißen *G-gleich* (kongruent), geschrieben $A \cong B$, wenn B durch eine Bewegung der Gruppe G aus A hervorgeht. Die G-Gleichheit ist offenbar reflexiv, symmetrisch und transitiv. — Zwei Polyeder A und B nennen wir *G-zerlegungsgleich*, geschrieben $A \sim B$, wenn sie sich in paarweise G-gleiche Teilpolyeder zerlegen lassen, so daß also $A = \sum_1^n A_\nu$ und $B = \sum_1^n B_\nu$ gilt, wobei $A_\nu \cong B_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ ist. Wie sich leicht überprüfen läßt, ist die G-Zerlegungsgleichheit wieder reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Es soll noch eine für die Zerlegungstheorie der Polyeder nützliche Bezeichnungsweise eingeführt werden: Ist n eine natürliche Zahl, so bedeute $n \cdot A$ ein Polyeder, das sich in n Teilpolyeder zerlegen läßt, die alle mit A G-zerlegungsgleich sind, so daß sich also $n \cdot A = \sum_1^n A_\nu$, $A_\nu \sim A$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ aufschreiben läßt. Alle Polyeder, die sich bei vorgegebenem n und A als $n \cdot A$ darstellen lassen, sind unter sich offenbar G-zerlegungsgleich; es gilt $n \cdot (A + B) = n \cdot A + n \cdot B$, $(n + m) \cdot A = n \cdot A + m \cdot A$, $n\,m \cdot A = n \cdot m \cdot A$.

II. Ergänzungsgleichheit.

Zwei Polyeder A und B heißen *G-ergänzungsgleich*, wenn sich durch Hinzufügung zweier G-zerlegungsgleicher Polyeder C und D zwei G-

[1]) Ein eigentliches Polyeder sei als Vereinigungsmenge endlich vieler k-dimensionaler abgeschlossener nicht-entarteter Simplexe darstellbar.

zerlegungsgleiche Polyeder gewinnen lassen, so daß also mit $C \sim D$ sich $A + C \sim B + D$ ergibt. Es gilt nun der folgende

Satz A. *Sind zwei eigentliche Polyeder A und B des k-dimensionalen euklidischen Raumes bezogen auf eine Bewegungsgruppe G G-ergänzungsgleich, so sind sie auch G-zerlegungsgleich, d. h. aus $A + C \sim B + D$ und $C \sim D$ folgt $A \sim B$.*

Wir wollen noch besonders darauf hinweisen, daß Satz A bei Zulassung uneigentlicher oder unterdimensionaler Polyeder falsch wird. In der Tat: Es sei W ein k-dimensionaler Würfel und $k > 1$; wählt man A als (0-dim.) Ecke und B als (1-dim.) Kante von W und setzt $C = D = W$, so sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, aber die Behauptung $A \sim B$ ist natürlich unrichtig[2]).

Für gewöhnliche Polyeder ($k = 3$) und bezogen auf Ergänzungs- und Zerlegungsgleichheit im klassischen Sinn (G = volle Bewegungsgruppe) wurde unser Satz A von J. P. Sydler[3]) erstmals allgemein bewiesen. Damit ist die Unterscheidung von Zerlegungsgleichheit und Ergänzungsgleichheit, die man seit Euklid stets beachten mußte, als unwesentlich erkannt; jedoch liegt diese Tatsache wesentlich tiefer, als man vor allem im Hinblick auf den elementargeometrischen Charakter der Fragestellung geneigt ist anzunehmen. — Die Sydlersche Beweiskonstruktion kann nicht ohne weiteres auf den höher-dimensionalen Fall angewendet werden, jedoch haben wir in unserem Beweis, den wir in Abschnitt IV entwickeln, einen interessanten Gedanken des Sydlerschen Beweises sehr wesentlich verwendet. Der Aufstieg in die höheren Dimensionen wird ermöglicht erstens durch eine neue Einteilung der Polyeder in Zylinderklassen, die in Abschnitt III näher erklärt ist, und zweitens durch einen vom Verf. kürzlich bewiesenen Satz[4]), wonach inhaltsgleiche Parallelotope T-zerlegungsgleich sind.

Es gibt noch eine Ergänzungsgleichheit anderer Art, die für die weitere Entwicklung der Zerlegungstheorie der Polyeder von Bedeutung ist: Zwei Polyeder A und B wollen wir *G-selbstergänzungsgleich* nennen, wenn sie durch Hinzufügung je gleich vieler mit A und B je G-zer-

[2]) Diese Bemerkung zeigt, daß die sich auf die Ergänzungsgleichheit beziehenden Sätze tiefer liegen müssen. Es gibt keine logisch-formalen Beweise wie sie etwa für die Verifikation der Transitivität ohne weiteres zur Verfügung stehen; die polyedrische Struktur muß in Verbindung mit der vorausgesetzten Eigentlichkeit sich an passender Stelle einschalten. In engem Zusammenhang mit diesen Schwierigkeiten steht auch die Tatsache, daß die entsprechenden Sätze für die Multikongruenz oder Endlichgleichheit von Punktmengen allgemein unrichtig sind. Vgl. z. B. hierüber A. Tarski, Über das absolute Maß linearer Punktmengen. Fund. math. **30**, 1938, 218—234 insb. Bemerkungen zum Subtraktionssatz 1.15.

[3]) J. P. Sydler, Sur la décomposition des polyèdres. Comment. math. helv. **16**. 1943/44, 266—273.

[4]) H. Hadwiger, Translative Zerlegungsgleichheit k-dimensionaler Parallelotope. Collectanea math. **3**, 1951.

legungsgleicher Polyeder in G-zerlegungsgleiche Polyeder übergehen, so daß also $n \cdot A \sim n \cdot B$ gilt. Hier gilt analog der folgende

Satz B. *Sind zwei eigentliche Polyeder A und B des k-dimensionalen euklidischen Raumes bezogen auf eine Bewegungsgruppe G G-selbstergänzungsgleich, so sind sie auch G-zerlegungsgleich, d. h. aus $n \cdot A \sim n \cdot B$ folgt $A \sim B$.*

Unser Satz B hängt sehr eng mit einer Gruppe von Sätzen zusammen, die in einem allgemeinen Abbildungssatz von D. König und S. Valkó[5]) ihren Ursprung haben, und deren Beweise verwickelt sind. Die bereits oben erwähnte Einteilung in Zylinderklassen von Abschnitt III ermöglicht hier einen direkten und kurzen Beweis, den wir ebenfalls in Abschnitt IV entwickeln werden.

III. Zylinderklassen.

Um eine einfache Beschreibung einiger im folgenden zur Anwendung kommenden Operationen zu ermöglichen, charakterisieren wir die Punkte des Raumes durch ihre in einem Ursprung 0 angreifenden Ortsvektoren. — Eine *Dilatation* mit λ $(0 < \lambda < \infty)$ führt das Polyeder A in das zu A homothetische Polyeder λA über; die Ortsvektoren der Punkte von $A' = \lambda A$ sind durch $\mathfrak{a}' = \lambda \mathfrak{a}$ gegeben, wobei $\mathfrak{a}$ die Ortsvektoren der Punkte von A bedeuten. — Die *Minkowskische Addition* $A \times B$ zweier Polyeder A und B kann wie folgt erklärt werden: Die Ortsvektoren der Punkte von $C = A \times B$ ergeben sich nach Ansatz $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, wobei die Ortsvektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der Punkte von A und B unabhängig variieren sollen. Die Minkowskische Addition ist kommutativ, assoziativ und in Verbindung mit der Dilatation distributiv. Im Rahmen dieser Arbeit soll die Operation $A \times B$ nur in dem spezielleren Fall zur Anwendung kommen, wo beide Polyeder A und B unterdimensional sind und in den beiden eigentlichen Teilräumen R_{k_a} und R_{k_b} des R_k der Dimension k_a und k_b $(0 < k_a, k_b < k)$ liegen, welche keine Parallelität aufweisen, also keine Raumrichtung gemeinsam haben sollen. Ein sich auf diese Weise ergebendes Polyeder $A \times B$ nennen wir einen *Zylinder*. Für derartige Zylinder gelten Gesetze wie $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$, $(\lambda A \times \lambda B) = \lambda (A \times B)$ usw. — Ein Polyeder A wollen wir nun einen *i-stufigen Zylinder* nennen, wenn eine Darstellung als i-stufige Minkowskische Summe der Form $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_i$ möglich ist, wobei $A_\nu \leqq R_{k_\nu}$, $k_\nu \geqq 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, i)$ und $k_1 + k_2 + \cdots + k_i = k$ gilt. Die Stufenzahl i stellt einen Grad zylindrischer Entartung dar. Innerhalb dieser Klassifikation ist ein 1-stufiger Zylinder (niedrigste Entartung) ein beliebiges Polyeder, also nicht notwendigerweise ein eigentlich zylindrisches Polyeder; dagegen ist ein k-stufiger Zylinder

[5]) D. König und S. Valkó, Über mehrdeutige Abbildungen von Mengen. Math. Ann. **95**, 1925, 135—138.

(höchste Entartung) offenbar ein Parallelotop. — Nach dem soeben erörterten Gesichtspunkte wollen wir nun innerhalb der Klasse $\mathfrak{R}$ der k-dimensionalen eigentlichen Polyeder eine Skala $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \supset \mathfrak{R}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{R}_k$ von Teilklassen fixieren: Die Klasse $\mathfrak{R}_i$ bestehe aus allen Polyedern von $\mathfrak{R}$, die mit endlich vielen i-stufigen Zylindern G-zerlegungsgleich sind.

Wir beweisen nun den folgenden

Hilfssatz. *Ist* $A \in \mathfrak{R}_i$, *so gilt* $A = A' + n^i \cdot \frac{1}{n} A$, *wobei* $A' \in \mathfrak{R}_{i+1}$ *ausfällt*; *für* $i = k$ *ist* A' *leer.*

Für $i = 1$ handelt es sich um die k-dimensionale Verallgemeinerung eines Lemmas von J. P. Sydler [6]); für $i = k$ ergibt sich die triviale Tatsache, daß sich ein k-dimensionales Parallelotop A in n^k homothetische Parallelotope $\frac{1}{n} A$ zerlegen läßt.

Den Beweis des Hilfssatzes führen wir zunächst für *Fall a*: Es sei $i = 1$. Es genügt offenbar, den Beweis für den spezielleren Fall zu führen, daß A ein eigentliches k-dimensionales Simplex S ist. Da G nach der Bedingung $T < G$ die Translationen enthält, darf eine Ecke von S im Ursprung 0 angenommen werden. Die Ortsvektoren $\mathfrak{s}$ der Punkte von S bilden nun die k-parametrige Schar

$$\mathfrak{s} = \Sigma_1^k \alpha_\nu \mathfrak{a}_\nu \quad [1 \geqq \alpha_1 \geqq \cdots \geqq \alpha_k \geqq 0],$$

wobei die $\mathfrak{a}_\nu$ k linear unabhängige Kantenvektoren von S bezeichnen. Es sei zunächst ein λ, $0 < \lambda < 1$, beliebig gewählt. Es gibt nun eine von λ abhängige Zerlegung von S in $k+1$ Teile S_μ, also $S = \Sigma_0^k S_\mu$, deren Teile durch die Ansätze

$$\mathfrak{s}_\mu = \Sigma_1^k \alpha_\nu \mathfrak{a}_\nu \quad [1 \geqq \alpha_1 \geqq \cdots \geqq \alpha_\mu \geqq \lambda \geqq \alpha_{\mu+1} \geqq \cdots \geqq \alpha_k \geqq 0]$$

gegeben sind; $\mathfrak{s}_\mu$ bezeichnen die Ortsvektoren der Punkte von S_μ. Mühelos erkennt man, daß die S_μ paarweise keine inneren Punkte aufweisen können und daß sie in ihrer Vereinigung das Simplex S vollständig ausfüllen, so daß eine richtige Zerlegung vorliegt. Weiter sieht man, daß $S_0 \cong \lambda S$ und $S_k \cong (1-\lambda) S$ gilt, wobei man wieder $T < G$ zu beachten hat. Für $0 < \mu < k$ ist dagegen $S_\mu = P_\mu \times Q_\mu$, falls P_μ bzw. Q_μ die μ- bzw. $(k-\mu)$-dimensionalen Simplexe bezeichnen, deren Ortsvektoren durch die Ansätze $\mathfrak{p} = \Sigma_1^\mu \alpha_\nu \mathfrak{a}_\nu$ $[1 \geqq \alpha_1 \geqq \cdots \geqq \alpha_\mu \geqq \lambda]$ bzw. $\mathfrak{q} = \Sigma_{\mu+1}^k \alpha_\nu \mathfrak{a}_\nu$ $[\lambda \geqq \alpha_{\mu+1} \geqq \cdots \geqq \alpha_k \geqq 0]$ gegeben sind. Die S_μ sind demnach eigentliche Zylinder und gehören sicher zu Klasse $\mathfrak{R}_2$.

Zusammenfassend haben wir das Ergebnis [7]) $S = \lambda S + (1-\lambda) S + S'$ mit $S' \in \mathfrak{R}_2$ gewonnen. Setzen wir der Reihe nach $\lambda = \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \cdots, \frac{1}{2}$,

[6]) loc. cit.: Fußnote [3]).

[7]) Diese Zerlegung wurde in anderem Zusammenhang bereits beschrieben und angewendet. Vgl. H. Hadwiger, Zur Inhaltstheorie der Polyeder. Collectanea math. **3**, 1950, 136—168; insb. § 4.

wobei wir das obige Ergebnis in passender Weise aufeinanderfolgend verwerten, so resultiert $S = n \cdot \frac{1}{n} S + S'$ mit $S' \in \mathfrak{R}_2$. Da sich nun ein beliebiges Polyeder A in Simplexe zerlegen läßt, gilt offenbar auch $A = n \cdot \frac{1}{n} A + A'$ mit $A' \in \mathfrak{R}_2$, w. z. b. w. Im Fall $k = 1$ ist offensichtlich A' leer.

Nun zu *Fall b*: Es sei $1 < i \leqq k$. Das Polyeder A sei zunächst selbst ein eigentlicher i-stufiger Zylinder. Nach Definition gilt demnach $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_i$, wobei $A_\nu \in R_{k_\nu}$, $k_\nu \geqq 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, i)$ und $k_1 + k_2 + \cdots + k_i = k$ ist. Das k_ν-dim. Polyeder A_ν gestattet nach dem soeben sichergestellten Ergebnis von Fall a in seinem Trägerraum R_{k_ν} eine Zerlegung $A_\nu = A'_\nu + n \cdot \frac{1}{n} A_\nu$, wo A'_ν für $k_\nu > 1$ einen eigentlichen Zylinder des R_{k_ν} bedeutet, für $k_\nu = 1$ aber leer ist. Für das ursprüngliche Zylinderpolyeder A resultiert nun die Darstellung

$$A = \left(A'_1 + n \cdot \frac{1}{n} A_1\right) \times \left(A'_2 + n \cdot \frac{1}{n} A_2\right) \times \cdots \times \left(A'_i + n \cdot \frac{1}{n} A_i\right).$$

Nach den geltenden Kommutativ- und Distributivregeln läßt sich dies wie folgt entwickeln

$$A = \Sigma A'_{\nu_1} \times \cdots \times A'_{\nu_j} \times n \cdot \frac{1}{n} A_{\mu_1} \times \cdots \times n \cdot \frac{1}{n} A_{\mu_{i-j}},$$

wobei $\nu_1, \ldots, \nu_j$ eine Kombination der Indizes $1, 2, \ldots, i$ zur Klasse j und $\mu_1, \ldots, \mu_{i-j}$ die komplementäre Kombination der gleichen Indizes zur Klasse $i - j$ bezeichnet; die Summation ist über alle Kombinationen zur Klasse j und über alle j von $j = 0$ bis $j = i$ zu erstrecken. Für $j = 0$ ist der einzige Summand

$$n \cdot \frac{1}{n} A_1 \times n \cdot \frac{1}{n} A_2 \times \cdots \times n \cdot \frac{1}{n} A_i = n^i \cdot \frac{1}{n} A.$$

Für $j > 1$ enthält jeder nicht leere Summand in seiner Darstellung als i-stufige Minkowskische Summe wenigstens ein Glied A'_ν, das nach Konstruktion im Minkowskischen Sinne weiter zerfällt, da es in seinem Trägerraum R_{k_ν} ein eigentliches Zylinderpolyeder ist. Jeder derartige Summand ist somit mindestens eine $(1 + i)$-stufige Minkowskische Summe und stellt also einen wenigstens $(1 + i)$-stufigen Zylinder dar. Zusammenfassend läßt sich demnach das Ergebnis $A = A' + n^i \cdot \frac{1}{n} A$ mit $A' \in \mathfrak{R}_{i+1}$ feststellen. Ist nun allgemeiner $A \in \mathfrak{R}_i$, so läßt sich nach unserer Konvention A in Teilpolyeder zerlegen, die alle mit i-stufigen Zylinderpolyedern G-zerlegungsgleich sind. Indem man das oben erzielte Ergebnis einzeln auf diese Zylinderpolyeder anwendet und dann zusammenfaßt, ergibt sich die Behauptung unseres Hilfssatzes. Der Fall $i = k$ ist in der soeben entwickelten Beweisführung formal enthalten: die A'_ν sind alle leer und so wird auch A' leer.

IV. Beweise der Sätze über die Zerlegungsgleichheit ergänzungsgleicher Polyeder.

Zunächst wenden wir uns dem Beweis von Satz A zu: Es gelte also

$$\text{(a)}\ A+C \sim B+D \qquad \text{und} \qquad \text{(b)}\ C \sim D.$$

Falls $A, B \in \mathfrak{R}_k$ gilt, so daß diese beiden als eigentlich vorausgesetzten Polyeder mit Parallelotopen G-zerlegungsgleich sind, folgt die Behauptung $A \sim B$ mit der sich aus (a) und (b) ergebenden Inhaltsgleichheit $V(A) = V(B)$ auf Grund des oben erwähnten Satzes [8]), wonach inhaltsgleiche eigentliche Parallelotope T-zerlegungsgleich, insbesondere also auch G-zerlegungsgleich sind. — Wir treffen nun die induktive Annahme, daß die Richtigkeit des Satzes A bereits unter der Nebenbedingung $A, B \in \mathfrak{R}_{i+1}$ erwiesen sei, wo $1 \leqq i < k$ ist. Nach dem soeben Erwähnten trifft diese Annahme für $i = k-1$ sicher zu. Es liege nun der Fall vor, wo $A, B \in \mathfrak{R}_i$ gilt. Nach dem im Abschnitt III bewiesenen Hilfssatz über die Zerlegung von Zylinderpolyedern läßt sich eine Zerlegung (c) $A = P + n^i \cdot \frac{1}{n} A$ vorkehren, wobei $P \in \mathfrak{R}_{i+1}$ gilt. Die hier willkürlich wählbare natürliche Zahl n genüge der Nebenbedingung $n^{k-i} > 1 + V(C)/V(A)$. Man beachte an dieser Stelle, daß die Voraussetzung der Eigentlichkeit von A in der Form $V(A) > 0$ beansprucht wird. — Wir führen nun ein Polyeder $S = n^i \cdot \frac{1}{n} C$ ein und bemerken zunächst, daß $V(S) = n^{i-k} V(C)$ ist. Im Hinblick auf die für n geforderte Nebenbedingung rechnet man mit $V(P) = (1 - n^{i-k}) V(A)$ leicht aus, daß $V(P) > V(S)$ ausfällt. Nach elementaren Überlegungen ist S zu einem Teilpolyeder von P T-zerlegungsgleich, also auch G-zerlegungsgleich; dies wollen wir nunmehr wie folgt ausdrücken: (d) $P \sim T + n^i \cdot \frac{1}{n} C$. Durch Einsatz in (c) wird hieraus $A \sim T + n^i \cdot \frac{1}{n}(A + C)$ und weiter nach (a) auch $A \sim T + n^i \cdot \frac{1}{n}(B + D)$ oder wieder nach (b) schließlich $A \sim T + n^i \cdot \frac{1}{n}(B + C)$. Vergleichen wir jetzt wieder mit (d), so resultiert (x) $A \sim P + n^i \cdot \frac{1}{n} B$. Analog zu (c) hat man auch (y) $B \sim Q + n^i \cdot \frac{1}{n} B$.

Führen wir noch die beiden Hilfspolyeder $U = n^i \cdot \frac{1}{n} B + C$ und $V = n^i \cdot \frac{1}{n} B + D$ ein, so ergibt sich nach (a) aus (x) und (y) $P + U \sim Q + V$. Da aber auch $U \sim V$ gilt, und nach Konstruktion $P, Q \in \mathfrak{R}_{i+1}$ ist, folgert man auf Grund der induktiven Voraussetzung zunächst $P \sim Q$ und nach (x) und (y) somit die Behauptung $A \sim B$ für den vorgesehenen

[8]) loc. cit.: Fußnote [4]).

Fall $A, B \in \mathfrak{R}_i$. Diese ist demnach auch für $i = 1$, d. h. auch für beliebige Polyeder richtig, w. z. b. w.

Nun zum Beweis von Satz B: Es gelte also (a) $n \cdot A \sim n \cdot B$. Falls $A, B \in \mathfrak{R}_k$ gilt, ergibt sich die Behauptung $A \sim B$ mit der aus (a) folgenden Inhaltsgleichheit $V(A) = V(B)$ in gleicher Weise wie beim vorstehenden Beweis. — Wir treffen wieder die induktive Annahme, daß die Richtigkeit von Satz B bereits unter der Nebenbedingung $A, B \in \mathfrak{R}_{i+1}$ erwiesen sei. Für $i = k - 1$ trifft diese Annahme sicher zu. Es liege nun der Fall $A, B \in \mathfrak{R}_i$ vor. Analog wie beim vorstehenden Beweis betrachten wir zwei Zerlegungen der Form (b) $A = P + n^i \cdot \frac{1}{n} A$ und ebenso (c) $B = Q + n^i \cdot \frac{1}{n} B$ mit $P, Q \in \mathfrak{R}_{i+1}$. Nach (a) folgt jetzt $n \cdot P + n^{i+1} \cdot \frac{1}{n} A \sim n \cdot Q + n^{i+1} \cdot \frac{1}{n} B$. Da nach (a) offenbar $n^{i+1} \cdot \frac{1}{n} A \sim n^{i+1} \cdot \frac{1}{n} B$ gilt, folgt nach Satz A aus der vorstehenden Relation $n \cdot P \sim n \cdot Q$ und wegen $P, Q \in \mathfrak{R}_{i+1}$ nach der induktiven Annahme also $P \sim Q$. Bedenkt man, daß wegen $i \geqq 1$ nach (a) offensichtlich $n^i \cdot \frac{1}{n} A \sim n^i \cdot \frac{1}{n} B$ gilt, so resultiert nach den Darstellungen (b) und (c) $A \sim B$ für den Fall $A, B \in \mathfrak{R}_i$. Diese Behauptung ist demnach auch richtig für $i = 1$, d. h. auch für beliebige Polyeder, w. z. b. w.

(Eingegangen am 3. Oktober 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 3, S. 299–307 (1952).

Eine Minkowskische Ungleichung für beliebige Mengen und ihre Anwendung auf Extremalprobleme.

Von

D. Ohmann in Frankfurt a. M.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist es, die MINKOWSKISCHE Ungleichung

$$V(K_1, K_2 \cdot K_3)^n \geqq V(K_1) V(K_2)^{n-1}, \tag{1}$$

die zwischen den konvexen Körpern K_1 und K_2 besteht, auf beliebige Mengen zu übertragen. Wir definieren dazu in § 1 in geeigneter Weise das gemischte Maß zwischen einer Menge und einem zentralsymmetrischen konvexen Körper. Da wir von den betrachteten Mengen lediglich Beschränktheit verlangen und alle Maße im Sinne von LEBESGUE definieren, werden wir es dabei mit inneren und äußeren gemischten Maßen zu tun haben, von denen wir die einen stets klein und die anderen stets groß schreiben werden. Wenn wir die Menge mit A und den konvexen Körper mit K bezeichnen, geht (1) in das Ungleichungspaar über[1]):

$$\text{I} \quad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad m(A, K \ldots K)^n \geqq m(A)\, m(K)^{n-1} \\ &\text{(b)} \quad M(A, K \ldots K)^n \geqq M(A)\, M(K)^{n-1}. \end{aligned}$$

Bei der Herleitung gehen wir so vor, daß wir erst (§ 2) Ungl. I auf eine Weise, die der Methode von G. SZEKERES[1]) nachgebildet ist, für Mengen beweisen, die aus endlich vielen konvexen Körpern bestehen; um dann (§ 3) mit Hilfe der einer Menge zuzuordnenden konvexen „Rumpfkörper" die Übertragung auf beliebige Mengen vorzunehmen. Schließlich wird in § 4 der Rahmen der Betrachtungen dadurch erweitert, daß wir bei vorgegebenen gemischten Maßen mit den m festen konvexen Körpern K, denen wir noch geeignete Be-

[1]) In ähnlicher Richtung gehende Untersuchungen sind angestellt worden von:
G. SZEKERES: Ein Problem über mehrere ebene Bereiche.
B. von Sz. NAGY: Über ein geometrisches Extremalproblem.
J. FAVARD: Sur le problème traité par G. SZEKERES et B. v. Sz. NAGY.
Acta Univ. Szeged, Acta Sci. math. 9 (1940); 247–252; 253–257 bzw. 258 bis 260.
Man beschränkt sich dort im wesentlichen auf die Betrachtung von Mengen, die aus endlich vielen konvexen Körpern bestehen, für den Fall, daß K eine Kugel darstellt.

dingungen auferlegen, nach Mengen maximalen Maßes fragen. Dabei wird allerdings die Frage nach der Einzigkeit der Extremalmengen nicht berührt.

§ 1.

Wir haben zunächst einige Definitionen an den Anfang zu stellen:

1. Unter dem linearen Normalriß $\alpha(\xi)$ einer Menge A verstehen wir die durch parallele $(n-1)$-dim. Hyperebenen der Normalenrichtung ξ vermittelte Projektion von A auf eine Gerade der Richtung ξ. Dann bezeichnen wir das lineare innere (äußere) Maß von $\alpha(\xi)$ als lineares inneres (äußeres) Quermaß $q(\xi)\,(Q(\xi))$ von A und die Extremalen $q_1, q_2\,(Q_1, Q_2)$ von $q(\xi)\,(Q(\xi))$ als Haupt- bzw. Nebenquermaße:

$$q_1 \geqq q(\xi) \geqq q_2 \qquad Q_1 \geqq Q(\xi) \geqq Q_2. \tag{2}$$

Ist K noch ein konvexer Körper, so definieren wir als gemischtes Maß von A mit K das über die Einheitskugel Ω_n zu erstreckende untere Lebesgue-Stieltjes-Integral:

$$\begin{aligned} m(A, K \dots K) &= \frac{1}{2n} \int_{-\Omega_n} q(A, \xi)\, dO(K, \xi) \\ M(A, K \dots K) &= \frac{1}{2n} \int_{-\Omega_n} Q(A, \xi)\, dO(K, \xi), \end{aligned} \tag{3}$$

dabei ist unter $O(K, \xi)$ die auf die äußere Normalenrichtung ξ als $(n-1)$-fachem Parameter bezogene Oberflächenfunktion von K verstanden.

2. Wie schon angedeutet, werden die Rumpfkörper einer Menge eine bedeutsame Rolle in unseren ferneren Entwicklungen spielen. Sie sind kurz folgendermaßen zu definieren: Wir deuten die Funktion $\frac{1}{2} q(A, \xi)$ als Abstand von $(n-1)$-dim. Ebenen $E(\xi)$ der Normalenrichtung ξ von einem festen Ursprung O und bezeichnen den konvexen Durchschnitt aller durch die $E(\xi)$ definierten und O enthaltenden Halbräume als inneren Rumpfkörper R'_A. In entsprechender Weise verläuft die Konstruktion des äußeren Rumpfkörpers R''_A aus der äußeren Quermaßfunktion $Q(\xi)$. Aus den Definitionen entnehmen wir unmittelbar:

$$\begin{aligned} q(R'_A, \xi) &\leqq q(A, \xi), & Q(R''_A, \xi) &\leqq Q(A, \xi), \\ q_j(R'_A) &\leqq q_j(A), & Q_j(R''_A) &\leqq Q_j(A), \quad (j = 1, 2) \\ m(R'_A, K \dots K) &\leqq m(A, K \dots K), & M(R''_A, K \dots K) &\leqq M(A, K \dots K). \end{aligned} \tag{4}$$

3. Für später merken wir einen Approximationssatz an, den wir, wenn wir die in 2. zur Konstruktion der Rumpfkörper benutzten Ebenen $E(\xi)$ als „erzeugende Ebenen" bezeichnen, so formulieren können:

Der innere (äußere) Rumpfkörper einer Menge läßt sich beliebig genau durch Polyeder mit Mittelpunkt approximieren, deren Seitenflächen in erzeugenden Ebenen enthalten sind.

Da der Beweis für den inneren und den äußeren Rumpfkörper völlig gleich verläuft, beschränken wir uns dabei auf die Betrachtung des inneren Rumpfkörpers R'_A der Menge A: Wir bezeichnen dann mit $\mathfrak{R}$ die Menge der — offenbar R'_A enthaltenden — Polyeder mit Mittelpunkt, deren Seitenflächen in erzeugenden Ebenen liegen, und mit $S(\xi)$ den durch die erzeugenden Ebenen $E(\xi)$ und $E(-\xi)$ begrenzten Parallelstreifen. Weiter sei $PS(\xi) \in \mathfrak{R}$ der Durchschnitt des Polyeders $P \in \mathfrak{R}$ mit $S(\xi)$ und $\mu(P)$ das Minimum des von ξ abhängigen Quermaßintegrals von $PS(\xi)$:

$$u(PS(\xi)) = \frac{1}{2n} \int_{\Omega_n} q[PS(\xi); \eta]\, d\omega_n(\eta),$$

(ω_n = Oberfläche der n-dim. Einheitskugel Ω_n).

Alsdann werde die Folge von Polyedern $P_j \in \mathfrak{R}$ dadurch definiert, daß, von einem Grundpolyeder $P_0 \in \mathfrak{R}$ ausgehend, $P_{j+1} = P_j S(\xi_j)$ stattfindet, wobei ξ_j jedesmal derart gewählt sei, daß

$$u(P_j) - u(P_{j+1}) > \tfrac{1}{2}\,(u(P_j) - \mu(P_j))$$

bestehe.

Die P_j konvergieren dann gegen ihren Durchschnitt P^*, der, wie der Konstruktion zu entnehmen ist, von keiner erzeugenden Ebene mehr geschnitten werden kann, und daher mit dem Rumpfkörper R'_A identisch sein muß. Aus der Konvergenz der $P_j \in \mathfrak{R}$ gegen R'_A folgt jedoch schon unser Approximationssatz.

§ 2.

Zur Herleitung von Ungl. I für Mengen, die aus endlich vielen konvexen Körpern bestehen, sei A eine solche Menge und umfasse die konvexen Körper K_ϱ ($\varrho = 1, \ldots, r$). Ist dann O ein fester Bezugspunkt und $\overline{K}_\varrho$ der Vektorkörper zu K_ϱ, der O zum Mittelpunkt habe, so betrachten wir die Menge A_τ, die aus den Körpern

$$K_{\varrho,\tau} = K_\varrho + \tau \overline{K}_\varrho$$

besteht, wobei die Addition im Minkowskischen Sinn zu verstehen ist. Für das Quermaß $q(K_{\varrho,\tau}; \xi)$ von $K_{\varrho,\tau}$ gilt dann bekanntlich

$$q(K_{\varrho,\tau}; \xi) = (1 + 2\tau)\, q(K_\varrho; \xi) \tag{5}$$

und für das Volumen $V(K_{\varrho,\tau})$

$$V(K_{\varrho,\tau}) \geqq (1 + 2\tau)^n\, V(K_\varrho). \tag{6}$$

Um die Veränderung des Quermaßes von A abzuschätzen, beachten wir, daß der Normalriß $\alpha(\xi)$ aus endlich vielen Intervallen $\alpha_\mu(\xi)$ besteht, die sich jeweils als Vereinigungsmenge der Normalrisse $\varkappa_\varrho(\xi)$ mehrerer Körper K_ϱ darstellen. Gehören etwa die Normalrisse $\varkappa_{\mu,\sigma}(\xi)$ $(\sigma = 1, \ldots, \gamma_\mu)$ zu $\alpha_\mu(\xi)$, so ist

$$m_1(\alpha_\mu(\xi)) \geqq \max m_1(\varkappa_{\mu,\sigma}(\xi)), \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, \gamma_\mu).$$

Beim Übergang zu A_τ geht die Vereinigungsmenge $\alpha_\mu(\xi)$ der $\varkappa_{\mu,\sigma}(\xi)$ in ein Intervall $\alpha_\mu^*(\xi)$ über, das $\alpha_\mu(\xi)$ auf jeder Seite um höchstens $\max \tau m_1(\varkappa_{\mu,\sigma}(\xi))$ überragt, woraus aber

$$m_1(\alpha_\mu^*(\xi)) \leqq (1 + 2\tau)\, m_1(\alpha_\mu(\xi))$$

folgt. Da $\alpha(\xi)$ die Vereinigungsmenge der $\alpha_\mu(\xi)$ darstellt und $\alpha_\tau(\xi)$ die Vereinigungsmenge der $\alpha_\mu^*(\xi)$, und die $\alpha_\mu(\xi)$ zudem untereinander punktfremd sind, erhalten wir für das Quermaß $q(A_\tau; \xi) = m_1(\alpha_\tau(\xi))$ von A_τ schließlich

$$q(A_\tau; \xi) \leqq (1 + 2\tau)\, q(A; \xi). \tag{7}$$

Daraus ergibt sich sofort für das gemischte Volumen mit dem zentralsymmetrischen konvexen Körper K:

$$m(A_\tau; K \ldots K) \leqq (1 + 2\tau)\, m(A; K \ldots K). \tag{7a}$$

Nun wählen wir τ so groß, daß zwar keine zwei Körper $K_{\varrho,\tau}$ innere Punkte gemeinsam haben können, jedoch wenigstens zwei einander berühren. Dann folgt aus (6):

$$m(A_\tau) \geqq (1 + 2\tau)^n\, m(A), \tag{8}$$

so daß wir für das Defizit $\Phi(A; K) = m(A; K \ldots K)^n - m(A)\, m(K)^{n-1}$ die Beziehung

$$\Phi(A_\tau; K) \leqq (1 + 2\tau)^n\, \Phi(A; K) \tag{9}$$

erhalten. Ersetzen wir schließlich die einander berührenden Körper $K_{\varrho,\tau}$ durch ihre gemeinsame konvexe Hülle, wodurch eine Menge A' entstehe, so wird das Quermaß dadurch in keiner Richtung vergrößert, während das Maß nicht abnimmt. Wir haben demnach keine Zunahme des Defizits Φ:

$$\Phi(A'; K) \leqq \Phi(A_\tau; K). \tag{10}$$

Beachten wir noch, daß die Anzahl r' der konvexen Körper, aus denen sich A' zusammensetzt, geringer ist als die Anzahl r der konvexen Körper, die A umfaßt, und führen die für $n = 1$ bekanntlich richtige Induktionsvoraussetzung ein, daß $\Phi \geqq 0$ für jede Menge stattthat, die aus weniger als r konvexen Körpern besteht, so folgt aus (9) und (10): $\Phi(A; K) \geqq 0$, d. h. die Richtigkeit der Ungl. 1 für Mengen, die sich aus konvexen Körpern zusammensetzen.

§ 3.

Die Übertragung auf beliebige Mengen vollzieht sich nun derart, daß wir zunächst für Mengen aus konvexen Körpern zeigen, daß der Rumpfkörper kein geringeres Maß besitzt als die Menge selbst, dieses Ergebnis auf beliebige Mengen übertragen und daraus die Ungleichungen I herleiten.

1. Ist A eine Menge, die aus endlich vielen konvexen Körpern besteht, so können wir aus der dann sicher statthabenden stetigen Abhängigkeit des Quermaßes von der zugehörigen Richtung folgern, daß durch jeden Punkt der Oberfläche des Rumpfkörpers wenigstens eine erzeugende Ebene hindurchgeht. Indem wir dann die Menge Ψ auf der Einheitskugel durch die Festsetzung definieren

$$(11)\quad q(R_A, \xi) < q(A, \xi) \text{ für } \xi \in \Psi; \quad q(R_A, \xi) = q(A, \xi) \text{ für } \xi \notin \Psi,$$

ergibt sich, daß durch jeden Punkt der Oberfläche von R_A, in dem wenigstens eine Stützнormalenrichtung ξ_0 der Menge Ψ angehört, zumindest zwei Stützebenen hindurchgehen, nämlich eine erzeugende Ebene und die Ebene der Normalenrichtung $\xi_0 \in \Psi$, die wegen (11) keine erzeugende Ebene sein kann. Damit weisen sich alle solche Punkte als Ecken- oder Kantenpunkte aus. Da deren Gesamtheit jedoch bekanntlich das Maß null zukommt, gilt:

$$(12)\quad \int_{\dot{\Psi}} dO(R_A; \xi) = 0,$$

woraus wir unmittelbar auf

$$\int_{\dot{\Psi}} q(A; \xi)\, dO(R_A; \xi) = \int_{\dot{\Psi}} q(R_A; \xi)\, dO(R_A; \xi) = 0$$

schließen können, dem wir wiederum

$$(13)\quad \begin{aligned} m(A, R_A \ldots R_A) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi \notin \dot{\Psi}} q(A, \xi)\, dO(R_A; \xi) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi \notin \dot{\Psi}} q(R_A; \xi)\, dO(R_A; \xi) = m(R_A) \end{aligned}$$

entnehmen können. Aus der Minkowskischen Ungleichung zwischen A und R_A erhalten wir damit

$$(14)\quad m(R_A) \geqq m(A).$$

2. Um diese Beziehung auf beliebige Mengen zu übertragen, approximieren wir vermöge unseres Approximationssatzes (§ 1, 3) den inneren Rumpfkörper R'_A der beliebigen Menge A derart durch ein Mittelpunktspolyeder P_k, dessen Seitenflächen in erzeugenden Ebenen liegen, daß bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$

$$(15)\quad m(P_k) - m(R'_A) < \frac{\varepsilon}{2}$$

bestehe. Sind dann $\xi_\varkappa (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ die Richtungen der Seitenflächennormalen von P_k, so approximieren wir die Normalrisse $\alpha(\xi_\varkappa)$ von A durch lineare abgeschlossene Mengen $\alpha'_\varkappa \leqq \alpha(\xi_\varkappa)$ und diese durch lineare Mengen $\alpha''_\varkappa \geqq \alpha'_\varkappa$, die aus endlich vielen Intervallen bestehen, so daß, wenn D den Durchmesser von A angibt, statthabe:

$$\begin{aligned} &m_1[\alpha(\xi_\varkappa)] - m_1(\alpha'_\varkappa) < \frac{\varepsilon}{2kD^{n-1}}, \\ &m_1(\alpha''_\varkappa) = m_1(\alpha(\xi_\varkappa)). \end{aligned} \tag{16}$$

Die Vereinigungsmenge $\Sigma_\varkappa$ der Ebenen, der Normalenrichtung $\xi_\varkappa$, die mit der Menge $\alpha''_\varkappa$ Punkte gemeinsam haben, enthält nach (16) die Menge A bis auf höchstens eine Teilmenge des inneren Maßes $\frac{\varepsilon}{2k}$. Damit wird aber A bis auf höchstens eine Teilmenge des inneren Maßes $\frac{\varepsilon}{2}$ vom Durchschnitt A^* aller $\Sigma_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ enthalten:

$$m(A^*) - m(A) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{17}$$

Da zudem $q(A^*, \xi_\varkappa) \leqq m_1[\alpha(\xi_\varkappa)]$, ist wegen (16) der Rumpfkörper R'_{A^*} von A^* im Polyeder P_k enthalten, so daß wir, indem wir noch aus der Konstruktion des Durchschnitts A^* schließen, daß er aus endlich vielen konvexen Körpern besteht und mithin (14) für ihn Gültigkeit besitzt, aus (15) und (17)

$$m(R'_A) - m(A) > -\varepsilon$$

folgern dürfen. Da hierin $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben war, ergibt sich die erste der beiden Ungleichungen:

$$m(R'_A) \geqq m(A), \quad M(R''_A) \geqq M(A). \tag{18}$$

Die für den äußeren Rumpfkörper maßgebende zweite Ungleichung läßt sich in völlig gleicher Weise herleiten, indem wir die entsprechenden Normalrisse zunächst durch offene Mengen und diese dann durch Mengen approximieren, die aus endlich vielen Intervallen bestehen.

3. Aus der Richtigkeit der Minkowskischen Ungleichung für die konvexen Rumpfkörper ergibt sich schließlich mit Hilfe von (4) und (18) die Erweiterung ihres Gültigkeitsbereiches auf beliebige Mengen in der zweifachen Form I.

§ 4.

Wir wollen nun noch einen Schritt weitergehen, indem wir bei vorgegebenen gemischten Maßen mit festen konvexen Körpern nach Mengen mit maximalem Maß fragen. Zur Beschreibung der Extremalmengen erinnern wir dabei an folgende Möglichkeit, konvexe Körper

zu kombinieren: Ist $O_\mu(\xi)$ die Oberflächenfunktion des konvexen Körpers $K_\mu (\mu = 1, \ldots, m)$, so stellt auch

$$O_\lambda(\xi) = \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu^{n-1} O_\mu(\xi) \quad (\lambda_\mu \geqq 0)$$

die Oberflächenfunktion eines konvexen Körpers dar, den wir durch

$$K_\lambda = \lambda_1 K_1 \overset{*}{+} \lambda_2 K_2 \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \lambda_m K_m = \sum_{\mu=1}^{m}{}^{*} \lambda_\mu K_\mu$$

symbolisch bezeichnen.

Es seien nun r zentralsymmetrische konvexe Körper $K_\varrho (\varrho = 1, \ldots, r)$ und s zentralsymmetrische konvexe Polyeder $P_\sigma (\sigma = 1, \ldots, s)$ vorgegeben, wobei kein K_ϱ ein ebenes Stück positiven $(n-1)$-dim. Volumens in seinem Rand enthalten soll, das zu einer der Seitenflächen der P_σ parallel ist. Dann fragen wir nach Mengen maximalen inneren (äußeren) Maßes, die mit den K_ϱ und P_σ die vorgegebenen inneren (äußeren) gemischten Maße

$$m(A; K_\varrho \ldots K_\varrho) = m'_\varrho, \quad (M(A; K_\varrho \ldots K_\varrho) = M'_\varrho), \tag{19}$$

$$m(A; P_\sigma \ldots P_\sigma) = m''_\sigma, \quad (M(A; P_\sigma \ldots P_\sigma) = M''_\sigma) \tag{20}$$

haben. Dabei sollen die m'_ϱ und m''_σ (M'_ϱ und M''_σ) allerdings der Zusatzforderung genügen, daß eine positive Kombination $K_\lambda = \sum_{\varrho=1}^{r}{}^{*} \lambda_\varrho K_\varrho$ ($K_\Lambda = \sum_{\varrho=1}^{r}{}^{*} \Lambda_\varrho K_\varrho$) existiere, die den Bedingungen (19) genüge, während ein zentralsymmetrischer konvexer Körper $K_\gamma \geqq K_\lambda$ ($K_\Gamma \geqq K_\Lambda$) die Bedingungen (20) erfülle.

Es wird sich ergeben, daß sich $K_\lambda (K_\Lambda)$ um höchstens eine Menge des Maßes null von einer abgeschlossenen Menge $A^* (A^{**})$ unterscheidet, die (19) und (20) genügt und maximales Maß besitzt.

Zunächst sieht man, daß $K_\lambda (K_\Lambda)$ unter allen Mengen, für die (19) gilt, maximales Maß besitzt. Es ist nämlich

$$m(A; K_\lambda \ldots K_\lambda) = \Sigma \lambda_\varrho^{n-1} m'_\varrho, \quad (M(A; K_\Lambda \ldots K_\Lambda) = \Sigma \Lambda_\varrho^{n-1} M'_\varrho),$$

$$m(K_\lambda) = m(K_\lambda; K_\lambda \ldots K_\lambda) = \Sigma \lambda_\varrho^{n-1} m'_\varrho,$$

$$(M(K_\Lambda) = M(K_\Lambda; K_\Lambda \ldots K_\Lambda) = \Sigma \Lambda_\varrho^{n-1} M'_\varrho),$$

so daß man aus der Minkowskischen Ungl. I sofort

$$m(K_\lambda) \geqq m(A), \quad (M(K_\Lambda) \geqq M(A)) \tag{21}$$

entnehmen kann.

Zur Konstruktion der Menge $A^* \geqq K_\lambda$ ($A^{**} \geqq K_\Lambda$), die sowohl (19) als auch (20) genügt, besitze das Polyeder P_σ die n_σ Seitenflächen $S_{\sigma,\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n_\sigma)$ mit den Normalenrichtungen $\xi_{\sigma,\nu}$ und dem Inhalt

$F_{\sigma,\nu}$, so daß sich das innere (äußere) gemischte Maß einer Menge A mit P_σ darstellen läßt durch

$$m(A; P_\sigma \dots P_\sigma) = \frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^{n_\sigma} q(A, \xi_{\sigma\nu}) F_{\sigma\nu},$$

$$(M(A, P_\sigma \dots P_\sigma) = \frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^{n_\sigma} (Q(A; \xi_{\sigma\nu}) F_{\sigma\nu}).$$

Nun sei $A^*_{\sigma\nu}(A^{**}_{\sigma\nu})$ eine abgeschlossene Menge, deren Quermaß in der Richtung $\xi_{\sigma\nu}$ die Größe

$$q(A_{\sigma\nu}; \xi_{\sigma\nu}) = q(K_\gamma; \xi_{\sigma\nu}) - q(K_\lambda; \xi_{\sigma\nu}), \quad (Q(A_{\sigma\nu}; \xi_{\sigma\nu}) = Q(K_\gamma; \xi_{\sigma\nu}) - Q(K_\Lambda; \xi_{\sigma\nu}))$$

besitze, während es in allen andern Richtungen verschwinde [2]). Setzen wir die linearen Normalrisse $\alpha^*_{\sigma\nu}(\xi_{\sigma\nu})$ $(\alpha^{**}_{\sigma\nu}(\xi_{\sigma\nu}))$ der $A^*_{\sigma,\nu}$ $(A^{**}_{\sigma\nu})$ untereinander und auch zu dem Normalriß $\varkappa_\lambda(\xi_{\sigma\nu})$ $(\varkappa_\Lambda(\xi_{\sigma\nu}))$ von $K_\lambda(K_\Lambda)$ als punktfremd voraus, so gilt dann für die Vereinigungsmenge $A^*(A^{**})$ von $K_\lambda(K_\Lambda)$ mit den Mengen $A^*_{\sigma\nu}(A^{**}_{\sigma\nu})$

$$m(A^*, P_\sigma \dots P_\sigma) = \frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^{n_\sigma} q(K_\gamma; \xi_{\sigma\nu}) F_{\sigma\nu} = m''_\sigma,$$

$$(M(A^{**}; P_\sigma \dots P_\sigma) = \frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^{n_\sigma} Q(K_\Gamma; \xi_{\sigma\nu}) F_{\sigma\nu} = M''_\sigma),$$

während das gemischte innere (äußere) Maß von $K_\lambda(K_\Lambda)$ mit den K_ϱ durch die Hinzunahme der $A^*_{\sigma\nu}(A^{**}_{\sigma\nu})$ nicht verändert wird, so daß also $A^*(A^{**})$ beiden Bedingungen (19) und (20) genügt. Da aus (21) zudem für jede Menge A, für die (19) und (20) gilt, unmittelbar

$$m(A) \leqq m(A^*) \qquad (M(A) \leqq M(A^{**}))$$

folgt, ist $A^*(A^{**})$ Träger der gesuchten Extremaleigenschaft.

Als Anwendung dieses allgemeinen Problems fragen wir nach der Menge maximalen Maßes bei vorgegebenem linearen Quermaß $q(\xi_0)$ $(Q(\xi_0))$ in der festen Richtung ξ_0 und Quermaßintegral

$$u = \frac{1}{2n} \int_{-\Omega_n} q(\xi)\, d\omega_n, \qquad U = \frac{1}{2n} \int_{-\Omega_n} Q(\xi)\, d\omega_n.$$

Dabei beachten wir, daß

$$u(A) = m(A; \Omega_n \dots \Omega_n), \qquad U(A) = M(A; \Omega_n \dots \Omega_n)$$

statthat und sich $q(\xi_0)$ $(Q(\xi_0))$ als gemischtes Maß mit einem ausgearteten konvexen Körper K_0 der Oberfläche n darstellen läßt, der in einer zu ξ_0 senkrechten $(n-1)$-dim. Ebene enthalten ist:

$$q(\xi_0) = m(A; K_0 \dots K_0), \qquad Q(\xi_0) = M(A; K_0 \dots K_0).$$

[2]) Solche Mengen werden von MAZURKIEWICZ und SAKS betrachtet: Sur les projections d'un ensemble fermé (Fundamenta 8 (1926); 109—113).

Dann unterscheiden wir die beiden Fälle:

a) $\omega_n q(\xi_0) \leqq 2nu, \quad \omega_n Q(\xi_0) \leqq 2nU,$

b) $\omega_n q(\xi_0) > 2nu, \quad \omega_n Q(\xi_0) > 2nU.$

Im Fall a) haben wir unser allgemeines Problem dadurch zu spezialisieren, daß wir $r = 2$ und $s = 0$ setzen und $K_1 = K_0$ und $K_2 = \Omega_n$ wählen. Damit finden wir als Extremalmenge einen Drehkörper, der in den Richtungen ξ_0 und $-\xi_0$ durch $(n-1)$-dim. Kugeln begrenzt wird und sonst konstantes Gausssches Krümmungsmaß besitzt. Im Fall b) ist $r = 1$, $s = 1$ und $K_1 = \Omega_n$, $P_1 = K_0$ zu setzen. Als Extremalmenge ergibt sich eine Menge, die sich um eine Nullmenge von einer Kugel unterscheidet.

(Eingegangen am 24. Juli 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 3, S. 308—309 (1952).

Note on a Theorem of Banach.

By

Ky Fan, Notre Dame, Indiana (USA.).

Our purpose is to prove the following

Theorem. *Let $A_1, A_2, \ldots, A_n$ be a finite number ($n \geqq 2$) of infinite sets arranged in cyclic order ($A_{n+1} = A_1$). For each $i = 1, 2, \ldots, n$, let t_i be a one-to-one transformation from A_i into A_{i+1}*

$$t_i(A_i) < A_{i+1}. \tag{1}$$

Then each A_i can be decomposed into the union of two disjoint subsets[1] *B_i, C_i*

$$A_i = B_i \cup C_i, \quad B_i \cap C_i = 0 \tag{2}$$

such that t_i transforms B_i onto C_{i+1} ($C_{n+1} = C_1$)

$$t_i(B_i) = C_{i+1}. \tag{3}$$

The case $n=2$ of this theorem is well-known. It is due to S. Banach[2] and is a more complete formulation of Schröder-Bernstein's theorem on equality of cardinal numbers. The present generalization to any finite number of sets seems to be new.

Proof. We first observe that (1) implies the following infinite sequence of inclusion relations

$$\begin{aligned} A_1 > t_n(A_n) > t_n t_{n-1}(A_{n-1}) > t_n t_{n-1} t_{n-2}(A_{n-2}) > \cdots > t_n t_{n-1} \ldots t_2 t_1(A_1) \\ > t_n t_{n-1} \ldots t_2 t_1 t_n(A_n) > t_n t_{n-1} \ldots t_1 t_n t_{n-1}(A_{n-1}) > \cdots. \end{aligned} \tag{4}$$

If a certain way of decomposing the n sets satisfies conditions (2) and (3), then it is completely determined by the choice of B_1. In fact, once B_1 is chosen, then by (2), (3), we are forced to take successively

$$\begin{aligned} C_1 &= A_1 - B_1, \\ C_2 &= t_1(B_1), \qquad B_2 = A_2 - C_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n &= t_{n-1}(B_{n-1}), \quad B_n = A_n - C_n. \end{aligned} \tag{5}$$

[1] One of the two subsets B_i, C_i may be empty.

[2] S. Banach, Un théorème sur les transformations biunivoques, Fundamenta Mathematicae, vol. 6 (1924), pp. 236—239. See also W. Sierpinski, Leçons sur les nombres transfinis, Paris 1928, pp. 90—93.

Furthermore, the choice of B_1 will meet our requirement, if and only if it satisfies

$$C_1 = t_n(B_n), \tag{6}$$

where C_1 and B_n are defined from B_1 by (5).

In order to express this condition (6) explicitly in terms of B_1, we derive successively from (5)

$$\begin{aligned}
t_2(B_2) &= [t_2(A_2) - t_2 t_1(B_1)],\\
t_3(B_3) &= [t_3(A_3) - t_3 t_2(A_2)] \cup t_3 t_2 t_1(B_1),\\
t_4(B_4) &= [t_4(A_4) - t_4 t_3(A_3)] \cup [t_4 t_3 t_2(A_3) - t_4 t_3 t_2 t_1(B_1)],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

To abridge our writing, let us introduce the following notations: In case of even n, we put

$$\begin{aligned}
D = {} & [t_n(A_n) - t_n t_{n-1}(A_{n-1})] \cup [t_n t_{n-1} t_{n-2}(A_{n-2}) - t_n t_{n-1} t_{n-2} t_{n-3}(A_{n-3})]\\
& \cup \ldots \cup [t_n t_{n-1} \ldots t_4(A_4) - t_n t_{n-1} \ldots t_3(A_3)] \cup t_n t_{n-1} \ldots t_3 t_2(A_2).
\end{aligned} \tag{7}$$

In case of odd n, we put

$$\begin{aligned}
E = {} & [t_n(A_n) - t_n t_{n-1}(A_{n-1})] \cup [t_n t_{n-1} t_{n-2}(A_{n-2}) - t_n t_{n-1} t_{n-2} t_{n-3}(A_{n-3})]\\
& \cup \ldots \cup [t_n t_{n-1} \ldots t_4 t_3(A_3) - t_n t_{n-1} \ldots t_3 t_2(A_2)].
\end{aligned} \tag{8}$$

Then, for B_n defined from B_1 by (5), we have

$$t_n(B_n) = D - t_n t_{n-1} \ldots t_2 t_1(B_1), \quad \text{when } n \text{ is even;} \tag{9}$$

or

$$t_n(B_n) = E \cup t_n t_{n-1} \ldots t_2 t_1(B_1), \quad \text{when } n \text{ is odd.} \tag{10}$$

Hence our theorem will be proved, as soon as we find a subset B_1 of A_1 such that

$$A_1 - B_1 = D - t_n t_{n-1} \ldots t_2 t_1(B_1), \quad \text{when } n \text{ is even;} \tag{11}$$

or

$$A_1 - B_1 = E \cup t_n t_{n-1} \ldots t_2 t_1(B_1), \quad \text{when } n \text{ is odd.} \tag{12}$$

Now, regardless of the parity of n, we define B_1 by

$$\begin{aligned}
B_1 = {} & [A_1 - t_n(A_n)] \cup [t_n t_{n-1}(A_{n-1}) - t_n t_{n-1} t_{n-2}(A_{n-2})]\\
& \cup [t_n t_{n-1} t_{n-2} t_{n-3}(A_{n-3}) - t_n t_{n-1} t_{n-2} t_{n-3} t_{n-4}(A_{n-4})] \cup \ldots
\end{aligned} \tag{13}$$

where the right-hand side is a union of infinitely many terms: the k-th term is obtained by subtracting the $2k$-th term of (4) from the $(2k-1)$-th term of (4). Clearly, B_1 is a subset of A_1. It is also easy to verify that B_1 so defined satisfies (11) in case of even n, and (12) in case of odd n. The theorem is thus proved.

(Eingegangen am 28. Juli 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 3. S. 310—320 (1952).

Der symmetrische Kreisel bei zeitfester Drehkraft.

Von

U. T. Bödewadt in Brunoy (Frankreich).

Einleitung.

Die einzelnen Gleichungen für den kräftefreien Kreisel lassen sich (z. B.) durch die JACOBIschen elliptischen Funktionen lösen. Das Problem, welches vom mathematischen Standpunkt aus dann am nächsten liegt, sind die EULERschen Gleichungen mit nicht verschwindender konstanter Drehkraft[1]). Diese Aufgabe ist (nach Kenntnis des Verf.) bisher nicht behandelt worden, offenbar weil man ihr keinen physikalischen Sinn zu geben hatte. Denn Unveränderlichkeit der Drehkraft in den EULERschen Gleichungen bedeutet, da diese sich auf das körperfeste System der Hauptträgheitsachsen beziehen, daß diese Drehkraft ihre Richtung ständig entsprechend der Drehbewegung des ganzen Körpers ändert, also mit dem Körper fest verbunden ist. Das mag früher wohl unsinnig erschienen sein. Nachdem aber inzwischen Rückstoßantriebe eine übliche Vorstellung geworden sind und auch ihre Verwendung zur Beeinflussung von Drehbewegungen, etwa für die Steuerung von Raumschiffen, in das Blickfeld der Technik getreten ist, hat das oben genannte Problem durchaus seine Bedeutung. Es soll nachstehend für den (technisch auch vorläufig bedeutsamsten) Fall des symmetrischen Kreisels behandelt werden, da hier eine teilweise Entkopplung der Kreiselgleichungen eintritt, welche die Aufgabe leicht angreifen läßt. Der Fall des unsymmetrischen Kreisels bietet demgegenüber größere Schwierigkeiten.

In Abschnitt 1 wird der Zeitverlauf der Drehgeschwindigkeit ermittelt, in Abschnitt 3 dann das Gesetz der Drehbewegung selbst berechnet, nachdem in Abschnitt 2 Formeln zur Beschreibung beliebiger Drehungen zusammengestellt wurden. Bei der Integration der Bewegungsgleichungen treten die FRESNELschen Integrale auf.

1. Die Drehgeschwindigkeit des Kreisels.

Es seien A die äquatoriale und C die polare Drehmasse eines symmetrischen Kreisels, u, v die Drehgeschwindigkeiten um zwei (zueinander senkrechte) Äquatorachsen und w die Drehgeschwindigkeit

[1]) Es werden die in der letzten Auflage des Buches „Der Kreisel“ von R. GRAMMEL gewählten Ausdrücke Drehkraft, Drehmasse usw. benutzt.

um die Polachse (Figurenachse). Wenn um die gewählten Hauptträgheitsachsen nun von der Zeit t_1 an die in Bezug auf das körperfeste System unveränderlichen Drehkräfte P, Q, R wirken, so lauten die Eulerschen Gleichungen:

$$\begin{aligned} A\dot{u} - (A-C)\,v\,w &= P, \\ A\dot{v} + (A-C)\,u\,w &= Q, \\ C\dot{w} \qquad\qquad &= R. \end{aligned} \tag{1}$$

Wir benutzen die Bezeichnungen

$$1 - \frac{C}{A} = h; \quad \frac{P}{A} = p, \quad \frac{Q}{A} = q, \quad \frac{R}{C} = r; \quad \sigma = \operatorname{sgn} h\,r. \tag{2}$$

Wir setzen zunächst $A \neq C$, also $h \neq 0$ voraus. Im Fall des Kugelkreisels ($h = 0$) sind die Drehungen um die drei Achsen gänzlich entkoppelt; die dazu gehörigen Ergebnisse werden jeweils am Ende der einzelnen Abschnitte aufgeführt. Dann lauten die Gleichungen (1) jetzt

$$\begin{aligned} \dot{u} - h\,v\,w &= p, \\ \dot{v} + h\,u\,w &= q, \\ \dot{w} \qquad\quad &= r. \end{aligned} \tag{3}$$

Die letzte dieser Gleichungen ergibt sofort die Lösung

$$w = w_1 + r(t - t_1). \tag{4}$$

Bei Einführung der komplexen Veränderlichen

$$\omega = u + i\,v; \quad \omega_1 = \omega(t_1) = u_1 + i\,v_1 \tag{5}$$

lassen sich die beiden ersten Gleichungen (3) zusammenfassen:

$$\dot{\omega} + i\,h\,w \cdot \omega = m. \tag{6}$$

Dabei bedeutet

$$m = p + i\,q = (P + i\,Q)/A. \tag{7}$$

Die Gleichung (6) hat nun, wenn wir noch, unter Verwendung der Funktionsbezeichnung

$$\operatorname{cis} x = \exp i\,x = \cos x + i \sin x, \tag{8}$$

zur Abkürzung

$$\xi = \xi(t) = h \int_{t_1}^{t} w(\tau)\,d\tau, \tag{9}$$

$$\Omega = \Omega(t) = \int_{t_1}^{t} \operatorname{cis} \xi(\tau)\,d\tau \tag{10}$$

schreiben, die folgende Lösung:

$$\omega = \operatorname{cis}(-\xi) \cdot (\omega_1 + m\,\Omega). \tag{11}$$

Für die weitere Behandlung sind nun die zwei Fälle $r = 0$ und $r \neq 0$ zu unterscheiden. Jeder dieser beiden Fälle gliedert sich nochmals in zwei Unterfälle. Bei $r = 0$ gibt der Wert von w_1 Anlaß zur Unterscheidung: $w_1 = 0$ oder $w_1 \neq 0$.

Fall 1. $h \neq 0$, $r = 0$, $w_1 = 0$.

Aus (9), (10) folgen in diesem Falle

$$\zeta \equiv 0, \tag{12}$$

$$\Omega = t - t_1, \tag{13}$$

so daß nach (11)

$$\omega = \omega_1 + m(t - t_1) \tag{14}$$

oder aufgespalten

$$\begin{aligned} u &= u_1 + p(t - t_1), \\ v &= v_1 + q(t - t_1). \end{aligned} \tag{15}$$

Fall 2. $h \neq 0$, $r = 0$, $w_1 \neq 0$.

Aus (4), (9), (10), (11) erhält man sofort

$$w \equiv w_1 \neq 0, \tag{16}$$

$$\zeta = h w (t - t_1); \quad \zeta_2 = h w (t_2 - t_1), \tag{17}$$

$$\Omega = \frac{1}{i h w} [\operatorname{cis} h w (t - t_1) - 1]; \quad \Omega_2 = \frac{i}{h w} (1 - \operatorname{cis} \zeta_2), \tag{18}$$

$$\omega = \frac{m}{i h w} + \left(\omega_1 - \frac{m}{i h w}\right) \operatorname{cis}(-\zeta), \tag{19}$$

$$\begin{aligned} u &= u_1 \cos\zeta + v_1 \sin\zeta + (h w)^{-1} [p \sin\zeta + q(1 - \cos\zeta)], \\ v &= v_1 \cos\zeta - u_1 \sin\zeta + (h w)^{-1} [q \sin\zeta - p(1 - \cos\zeta)]. \end{aligned} \tag{20}$$

Fall 3. $h \neq 0$, $r \neq 0$.

Unter Verwendung der Konstanten

$$t_0 = t_1 - \frac{w}{r} \tag{21}$$

geht die Gleichung (4) über in

$$w = r(t - t_0); \quad w_2 = r(t_2 - t_0) = w_1 + r(t_2 - t_1). \tag{22}$$

Aus (9) wird jetzt

$$\zeta(t) = \tfrac{1}{2} h r (t - t_1)(t + t_1 - 2 t_0) = \eta(t) - \eta_1, \tag{23}$$

wenn

$$\eta(t) = \tfrac{1}{2} h r (t - t_0)^2; \quad \eta_1 = \tfrac{1}{2} h r (t_1 - t_0)^2 \tag{24}$$

benutzt werden. Die Bildung von Ω ist darauf mittels der FRESNELschen Integrale möglich, die hier in der Gestalt

$$C(x) = \int_0^x \frac{\cos y}{\sqrt{y}}\, dy; \qquad S(x) = \int_0^x \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\, dy \tag{25}$$

angenommen werden. Dazu ist in (10) als Integrationsveränderliche $y = |\eta(\tau)|$ einzuführen, wofür man nach (2) auch $y = \sigma\eta(\tau)$ schreiben kann. Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden, da η für $\tau = t_0$ verschwindet:

3a) $t_0 \leqq t_1 \leqq t$; 3b) $t_1 \leqq t_0 \leqq t$; 3c) $t_1 \leqq t \leqq t_0$.

Der Integrand von (10) läßt sich nach (23) als $\operatorname{cis}(-\eta_1)\operatorname{cis}\eta$ darstellen, so daß wir wegen

$$\operatorname{cis}\eta = \cos\eta + i\sin\eta = \cos\sigma\eta + i\sigma\sin\sigma\eta = \cos y + i\sigma\sin y$$

nur noch $\cos y$ und $\sin y$ zu betrachten haben.

Aus

(26) $$y = \sigma\eta(\tau) = \tfrac{1}{2}\sigma h r(\tau - t_0)^2$$

folgt

$$|\tau - t_0| = \frac{2}{\sqrt{2|hr|}}\sqrt{y},$$

wo rechts die positiven Wurzelwerte zu nehmen sind. Es bleibt also, wenn wir

(27) $$(2|hr|)^{-\frac{1}{2}} = k$$

schreiben,

(28) $$\tau = t_0 + \operatorname{sgn}(\tau - t_0)\,2k\sqrt{y}$$

übrig, woraus folgt

(29) $$d\tau = \operatorname{sgn}(\tau - t_0)\,k\frac{dy}{\sqrt{y}}.$$

Im Fall 3a) formen wir das Integral folgendermaßen um:

$$\int_{t_1}^{t}\cos y\,d\tau = \left(\int_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t_1}\right)\cos y\,d\tau = k[C(\sigma\eta) - C(\sigma\eta_1)].$$

Im Fall 3b) bekommen wir:

$$\int_{t_1}^{t}\cos y\,d\tau = \left(\int_{t_0}^{t} + \int_{t_1}^{t_0}\right)\cos y\,d\tau = k[C(\sigma\eta) + C(\sigma\eta_1)].$$

Im Fall 3c) entsteht:

$$\int_{t_1}^{t}\cos y\,d\tau = \left(\int_{t_1}^{t_0} - \int_{t}^{t_0}\right)\cos y\,d\tau = k[C(\sigma\eta_1) - C(\sigma\eta)].$$

Alle drei Ergebnisse lassen sich, wenn wir jetzt

(30) $$\varepsilon = \operatorname{sgn}(t - t_0);\quad \varepsilon_1 = \operatorname{sgn}(t_1 - t_0)$$

einführen, in der nachstehenden Gleichung (31) zusammenfassen. (Für $\sin y$ ist dieselbe Rechnung gültig.) Wir führen dabei nochmals neue

Abkürzungen ein:

$$\int_{t_1}^{t} \cos y \, d\tau = k[\varepsilon C(\sigma\eta) - \varepsilon_1 C(\sigma\eta_1)] = k\, C(\eta_1, \eta),$$

$$\int_{t_1}^{t} \sin y \, d\tau = k[\varepsilon S(\sigma\eta) - \varepsilon_1 S(\sigma\eta_1)] = k\, S(\eta_1, \eta). \tag{31}$$

Damit erhält man dann

$$\Omega = \operatorname{cis}(-\eta_1)\, k\,[C(\eta_1, \eta) + i\sigma S(\eta_1, \eta)]. \tag{32}$$

Setzen wir diese Formel in (11) ein, so kommt

$$\omega = \omega_1 \operatorname{cis}(-\xi) + m k \operatorname{cis}(-\eta)\,[C(\eta_1, \eta) + i\sigma S(\eta_1, \eta)], \tag{33}$$

oder nach den Komponenten u, v aufgelöst [2])

$$\begin{aligned} u &= u_1 \cos\xi + v_1 \sin\xi + pk(C\cos\eta + \sigma S\sin\eta) + qk(C\sin\eta - \sigma S\cos\eta), \\ v &= v_1 \cos\xi - u_1 \sin\xi + qk(C\cos\eta + \sigma S\sin\eta) - pk(C\sin\eta - \sigma S\cos\eta). \end{aligned} \tag{34}$$

Fall 4. $h = 0$.

Beim Kugelkreisel fließen aus (6) sofort an Stelle von (11), wenn noch (4) hinzugenommen wird, die Gleichungen

$$\omega = \omega_1 + m(t - t_1), \tag{35}$$

$$\begin{aligned} u &= u_1 + p(t - t_1), \\ v &= v_1 + q(t - t_1), \\ w &= w_1 + r(t - t_1). \end{aligned} \tag{36}$$

2. Formeln zur Beschreibung von Drehbewegungen.

Bisher war nur der Verlauf der Drehgeschwindigkeiten in Bezug auf das körperfeste Achsensystem untersucht worden. Es ist nunmehr die Veränderung der Stellung des Kreisels gegenüber einem raumfesten Achsensystem zu betrachten. Dazu werde zunächst eine Zusammenstellung der später benötigten Formeln zur kinematischen Beschreibung der Drehbewegung gegeben.

Nehmen wir an, daß die Bezugsachsen für die Komponenten u, v, w in der „Normallage" des Kreisels der Reihe nach mit der x, y, z-Achse eines raumfesten Systems zusammenfallen, und denken wir den Übergang zur jeweiligen tatsächlichen Stellung durch folgende drei Drehungen um die Eulerschen Winkel ersetzt: 1) eine Drehung um die z-Achse um den Winkel λ, wodurch das xyz-Achsenkreuz in die Stellung $x^1 y^1 z^1$ übergeht; 2) eine Drehung um die y^1-Achse um den Winkel ϑ, wodurch das $x^1 y^1 z^1$-Achsenkreuz in das System $x^2 y^2 z^2$ übergeht; und schließlich eine Drehung um die z^2-Achse um den Winkel φ, wodurch aus dem System $x^2 y^2 z^2$ das System $x^3 y^3 z^3$ der Hauptträgheitsachsen

[2]) In (34) bedeuten C und S die durch (31) eingeführten Größen.

wird. Nennen wir den Tensor, der das raumfeste Achsensystem (xyz) in das körperfeste $(x^3y^3z^3)$-System überführt, $\mathfrak{A}$, so hat dieser im xyz-System die Orthogonalmatrix (A_{mn}) $(m, n = 1, 2, 3)$ mit

$$
\begin{aligned}
A_{11} &= \cos\varphi\cos\lambda\cos\vartheta - \sin\varphi\sin\lambda\\
A_{12} &= \cos\varphi\sin\lambda\cos\vartheta + \sin\varphi\cos\lambda\\
A_{13} &= -\cos\varphi\sin\vartheta\\
A_{21} &= -\sin\varphi\cos\lambda\cos\vartheta - \cos\varphi\sin\lambda\\
A_{22} &= -\sin\varphi\sin\lambda\cos\vartheta + \cos\varphi\cos\lambda\\
A_{23} &= \sin\varphi\sin\vartheta\\
A_{31} &= \cos\lambda\sin\vartheta\\
A_{32} &= \sin\lambda\sin\vartheta\\
A_{33} &= \cos\vartheta.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Ein Vektor $\mathfrak{x}$ hat dann in Bezug auf das körperfeste System dieselben Komponenten, wie sie der Vektor $\mathfrak{x}' = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{x}$ im raumfesten System hat. Konstanz von $\mathfrak{x}'$ bedeutet, daß $\mathfrak{x}$ im körperfesten System konstante Komponenten hat, also ein körperfester Vektor ist. Die Veränderlichkeit von

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}' \tag{38}$$

beruht dann nur auf der Veränderlichkeit von $\mathfrak{A}$, d. h. auf der Drehbewegung des Körpers; $\mathfrak{A}$ gibt die jeweilige Stellung des Kreisels im Raum an. Nun kann man in diesem Fall die zeitliche Ableitung von $\mathfrak{x}$ einerseits durch den Ausdruck $\dot{\mathfrak{A}}\mathfrak{x}'$ darstellen, andererseits in üblicher Weise durch das Vektorprodukt mit dem Vektor der Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{w} = (w_x, w_y, w_z)$ oder durch das Produkt mit dem infinitesimalen Drehungsaffinor $\mathfrak{W}$, dessen Komponenten im (xyz)-System

$$
\begin{aligned}
W_{11} &= W_{22} = W_{33} = 0, \quad & W_{32} &= -W_{23} = w_x,\\
W_{13} &= -W_{31} = w_y, & W_{21} &= -W_{12} = w_z
\end{aligned}
$$

sind:

$$\dot{\mathfrak{x}} = [\mathfrak{w}, \mathfrak{x}] = \mathfrak{W}\mathfrak{x} = \dot{\mathfrak{A}}\mathfrak{x}'. \tag{39}$$

Hier setzen wir (38) ein sowie die entsprechende Beziehung für die Drehgeschwindigkeit

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{A}\mathfrak{w}', \tag{40}$$

wobei $\mathfrak{w}'$ durch Überführung des körperfesten Achsensystems in die Normallage unter Festhaltung der Komponenten (u, v, w) aus $\mathfrak{w}$ entsteht. $\mathfrak{w}'$ ist also nur insoweit veränderlich, als diese Komponenten (u, v, w) sich ändern, während in $\mathfrak{w}$ auch die Änderung von $\mathfrak{A}$ eingeht. Ferner ist zu berücksichtigen, daß der Affinor $\mathfrak{W}$ sich gemäß der Bedingung $\mathfrak{W}\mathfrak{x} = \mathfrak{A}(\mathfrak{W}'\mathfrak{x}')$ transformieren, also dem Gesetz

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{A}\mathfrak{W}'\mathfrak{A}^{-1} \tag{41}$$

gehorchen muß, wobei infolge der Orthogonalität von $\mathfrak{A}$ wiederum die Beziehung $\mathfrak{W}'\mathfrak{x}' = [\mathfrak{w}'\mathfrak{x}']$ gilt. Dann folgen aus (39) bis (41) die Beziehungen zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{W}$:

$$\mathfrak{W}\mathfrak{A} = \dot{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}\mathfrak{W}', \quad \mathfrak{W} = \dot{\mathfrak{A}}\mathfrak{A}^{-1}, \quad \mathfrak{W}' = \mathfrak{A}^{-1}\dot{\mathfrak{A}}. \tag{42}$$

$\mathfrak{W}'$ ist mit $\mathfrak{w}'$ gegeben, die Komponenten ($\mathfrak{Re}\,\omega$, $\mathfrak{Im}\,\omega$, w) von $\mathfrak{w}'$ sind in Abschnitt 1 ermittelt worden. Aus der letzten der Gleichungen (42) ergibt sich, wenn wir den aus $\mathfrak{W}$ durch Integration entstehenden gleichfalls antimetrischen Affinor

$$\int_{t_1}^{t} \mathfrak{W}'\,dt = \mathfrak{U} \tag{43}$$

und entsprechend

$$\int_{t_1}^{t} \mathfrak{w}'\,dt = \mathfrak{u} \tag{44}$$

setzen, die jeweilige Stellung $\mathfrak{A}$ in der Gestalt

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{C} = \mathfrak{D}\mathfrak{A}_1 \text{ mit } \mathfrak{C} = \exp\mathfrak{U}, \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1^{-1}. \tag{45}$$

(Man könnte sagen: $\mathfrak{u}$ bedeutet den Umdrehungswinkel, den die Drehgeschwindigkeitskomponenten u, v, w um die Hauptträgheitsachsen erzeugen würden, wenn diese Drehungen sich gegenseitig nicht beeinflussen würden.) Sind nun (α, β, γ) die Komponenten von $\mathfrak{u}$ im körperfesten System und ist

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \psi^2, \tag{46}$$

so finden sich für die Potenzen von $\mathfrak{U}$ die Beziehungen [3])

$$\mathfrak{U}^2 = \{\mathfrak{u};\mathfrak{u}\} - \psi^2\mathfrak{E}; \quad \mathfrak{U}^3 = -\psi^2\mathfrak{U}, \quad \mathfrak{U}^4 = -\psi^2\mathfrak{U}^2. \tag{47}$$

Aus der Potenzreihe für $\exp\mathfrak{U}$ ergibt sich infolgedessen

$$\begin{aligned}\mathfrak{C} = \exp\mathfrak{U} &= \mathfrak{E} + \mathfrak{U}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\psi^2)^n}{(2n+1)!} + \mathfrak{U}^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\psi^2)^{n-1}}{(2n)!} \\ &= \mathfrak{E} + \mathfrak{U}\frac{\sin\psi}{\psi} + \mathfrak{U}^2\frac{1-\cos\psi}{\psi^2} \\ &= \mathfrak{E}\cos\psi + \mathfrak{U}\frac{\sin\psi}{\psi} + \{\mathfrak{u};\mathfrak{u}\}\frac{1-\cos\psi}{\psi^2}\end{aligned} \tag{48}$$

und somit nach (45)

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1\cos\psi + \mathfrak{A}_1\mathfrak{U}\frac{\sin\psi}{\psi} + \mathfrak{A}_1\{\mathfrak{u};\mathfrak{u}\}\frac{1-\cos\psi}{\psi^2}. \tag{49}$$

Legen wir das raumfeste Achsensystem so, daß es zur Zeit $t = t_1$ mit dem Hauptachsensystem zusammenfällt, so wird $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{A} = \mathfrak{D} = \mathfrak{C}$. $\mathfrak{C}$ läßt sich als orthogonale Matrix nach (37) durch (von $\mathfrak{A}_1$ aus gemessene)

[3]) $\{\mathfrak{a};\mathfrak{b}\}$ bezeichnet die Dyade: $\mathfrak{c}\{\mathfrak{a};\mathfrak{b}\}\mathfrak{d} = (\mathfrak{c}\mathfrak{a})(\mathfrak{b}\mathfrak{d})$; $\mathfrak{E}$ ist der Einheitstensor.

Eulersche Winkel $\lambda, \vartheta, \varphi$ darstellen, die nach (37) am schnellsten aus den Gleichungen

$$\text{(50)} \qquad \operatorname{tg}\lambda = \frac{C_{32}}{C_{31}}, \quad \cos\vartheta = C_{33}, \quad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{C_{23}}{C_{13}}$$

zu entnehmen sind. Die dazu benutzten Komponenten von $\mathfrak{C}$ sind nach (48)

$$\text{(51)} \qquad \begin{aligned} C_{13} &= +\beta\frac{\sin\psi}{\psi} + \alpha\gamma\frac{1-\cos\psi}{\psi^2}, \\ C_{23} &= -\alpha\frac{\sin\psi}{\psi} + \beta\gamma\frac{1-\cos\psi}{\psi^2}, \\ C_{31} &= -\beta\frac{\sin\psi}{\psi} + \alpha\gamma\frac{1-\cos\psi}{\psi^2}, \\ C_{32} &= +\alpha\frac{\sin\psi}{\psi} + \beta\gamma\frac{1-\cos\psi}{\psi^2}, \\ C_{33} &= +\cos\psi + \gamma^2\frac{1-\cos\psi}{\psi^2}. \end{aligned}$$

Für Anwendungen in einer geplanten späteren Untersuchung sei auch die Auflösung dieser Gleichungen nach α, β, γ angegeben. Dazu wird zuerst ψ berechnet. Setzt man

$$\text{(52)} \qquad E = \frac{C_{13}+C_{31}}{C_{32}-C_{23}} = \frac{C_{23}+C_{32}}{C_{13}-C_{31}} = \gamma\,\frac{1-\cos\psi}{\psi\sin\psi},$$

so ergibt sich

$$(C_{33}-\cos\psi)\frac{1-\cos\psi}{\sin^2\psi} = E^2,$$

also

$$\text{(53)} \qquad \cos\psi = \frac{C_{33}-E^2}{1+E^2}.$$

Wenn man die Komponenten von $\mathfrak{C}$ nach (37) durch (von $\mathfrak{A}_1$ aus gemessene) Eulersche Winkel ausdrückt, erhält man für E aus (52)

$$\text{(54)} \qquad E = -\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\lambda+\varphi).$$

Damit folgt aus (53) nach einigen Umformungen

$$\text{(55)} \qquad \cos\tfrac{1}{2}\psi = \cos\tfrac{1}{2}\vartheta\cos\tfrac{1}{2}(\lambda+\varphi).$$

Nachdem so ψ bekannt ist, findet man α, β aus den Ausdrücken für $C_{32}-C_{23}$ und $C_{13}-C_{31}$, γ aus (52) und (54):

$$\text{(56)} \qquad \begin{aligned} \alpha &= +\psi\frac{\sin\frac{1}{2}\vartheta}{\sin\frac{1}{2}\psi}\sin\tfrac{1}{2}(\lambda-\varphi), \\ \beta &= -\psi\frac{\sin\frac{1}{2}\vartheta}{\sin\frac{1}{2}\psi}\cos\tfrac{1}{2}(\lambda-\varphi), \\ \gamma &= -\psi\frac{\cos\frac{1}{2}\vartheta}{\sin\frac{1}{2}\psi}\sin\tfrac{1}{2}(\lambda+\varphi). \end{aligned}$$

3. Die Drehungen des Kreisels.

Die in Abschnitt 2 aufgeführten Formeln gelten als rein kinematische Beziehungen allgemein, sowohl für alle vier oben unterschiedenen Fälle wie auch für den unsymmetrischen Kreisel. Zu ihrer Auswertung kommt es nun auf die Berechnung der Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \psi$ an, wofür außer (44) nach (42) und (5) folgende Gleichungen bestehen:

$$\alpha + i\beta = \int_{t_1}^{t} \omega(\tau)\, d\tau; \quad \gamma = \int_{t_1}^{t} w(\tau)\, d\tau. \tag{57}$$

Hier sind jetzt die einzelnen Fälle zu unterscheiden. Wir geben die Formeln für α, β, γ; für ψ hingegen bleibt die Formel (46) anzuwenden.

Fall 1. $h \neq 0$, $r = 0$, $w_1 = 0$.

$$\begin{aligned} \alpha + i\beta &= \omega_1 (t - t_1) + \tfrac{1}{2} m (t - t_1)^2; \\ \alpha &= u_1 (t - t_1) + \tfrac{1}{2} p (t - t_1)^2, \\ \beta &= v_1 (t - t_1) + \tfrac{1}{2} q (t - t_1)^2, \\ \gamma &= 0. \end{aligned} \tag{58}$$

Fall 2. $h \neq 0$, $r = 0$, $w = w_1 \neq 0$.

$$\alpha + i\beta = \frac{m}{i h w} (t - t_1) + \left(\frac{i \omega_1}{h w} - \frac{m}{h^2 w^2} \right) [\operatorname{cis}(-\zeta) - 1]; \tag{59}$$

$$\alpha = \frac{q}{h w} (t - t_1) + (1 - \cos\zeta) \left(\frac{v_1}{h w} + \frac{p}{h^2 w^2} \right) + \sin\zeta \left(\frac{u_1}{h w} - \frac{q}{h^2 w^2} \right),$$

$$\beta = -\frac{p}{h w} (t - t_1) + (1 - \cos\zeta) \left(\frac{-u_1}{h w} + \frac{q}{h^2 w^2} \right) + \sin\zeta \left(\frac{v_1}{h w} + \frac{p}{h^2 w^2} \right),$$

$$\gamma = w (t - t_1).$$

Fall 3. $h \neq 0$, $r \neq 0$.

Mit den Formeln

$$\begin{aligned} \int_0^x (\cos u\, C u + \sin u\, S u) \frac{du}{\sqrt{u}} &= \frac{1}{2} (C^2 x + S^2 x), \\ \int_0^x (\cos u\, S u - \sin u\, C u) \frac{du}{\sqrt{u}} &= \cos x\, C x + \sin x\, S x - 2\sqrt{x} \end{aligned} \tag{60}$$

läßt sich die aus (50) und (33) zunächst erhaltene Gleichung

$$\begin{aligned} \alpha + i\beta = \{\omega_1 \operatorname{cis}\eta_1 - m k \varepsilon_1 [C(\sigma\eta_1) + i\sigma S(\sigma\eta_1)]\} \int_{t_1}^{t} \operatorname{cis}(-\eta)\, d\tau \\ + m k \varepsilon \int_{t_1}^{t} \operatorname{cis}(-\eta) [C(y) + i\sigma S(y)]\, d\tau \end{aligned} \tag{61}$$

wiederum unter Benutzung von (26), (29), (31) und von

$$\operatorname{cis}(-\eta) = \cos y - i\sigma \sin y$$

auswerten zu

$$\begin{aligned}\alpha + i\beta = {} & \{\omega_1 k \operatorname{cis}\eta_1 - \varepsilon m k^2 \varepsilon_1 [C(\sigma\eta_1) + i\sigma S(\sigma\eta_1)]\} \cdot [C(\eta_1, \eta) - i\sigma S(\eta_1, \eta)] \\ & + m k^2 \varepsilon \Big\{ \frac{\varepsilon}{2} [C^2(\sigma\eta) + S^2(\sigma\eta)] - \frac{\varepsilon_1}{2} [C^2(\sigma\eta_1) + S^2(\sigma\eta_1)] \\ & + i\sigma [\varepsilon \cos\eta\, C(\sigma\eta) + \varepsilon \sin\eta\, S(\sigma\eta) - \varepsilon_1 \cos\eta_1\, C(\sigma\eta_1) \\ & - \varepsilon_1 \sin\eta_1\, S(\sigma\eta_1) - 2\varepsilon \sqrt{|\eta|} + 2\varepsilon_1 \sqrt{|\eta_1|}]\Big\}.\end{aligned}$$

Hierin lassen sich noch einige Zusammenfassungen vornehmen, und man erhält

$$\begin{aligned}\alpha + i\beta = {} & \omega_1 k \operatorname{cis}\eta_1 [C(\eta_1, \eta) - i\sigma S(\eta_1, \eta)] \\ & + \tfrac{1}{2} m k^2 \{C^2(\eta_1, \eta) + S^2(\eta_1, \eta) + (1 - \varepsilon\varepsilon_1)[C^2(\sigma\eta_1) + S^2(\sigma\eta_1)]\} \\ & + i\sigma m k^2 \{S(\sigma\eta)[\sin\eta + \varepsilon\varepsilon_1 C(\sigma\eta_1)] + C(\sigma\eta)[\cos\eta - \varepsilon\varepsilon_1 S(\sigma\eta_1)] \\ & - \varepsilon\varepsilon_1 [\cos\eta_1 C(\sigma\eta_1) + \sin\eta_1 S(\sigma\eta_1)] - 2(\sqrt{|\eta|} - \varepsilon\varepsilon_1 \sqrt{|\eta_1|})\}.\end{aligned} \tag{62}$$

Trennung in Realteil und Imaginärteil liefert

$$\begin{aligned}\alpha = {} & u_1 k [\cos\eta_1 C(\eta_1, \eta) + \sigma \sin\eta_1 S(\eta_1, \eta)] \\ & - v_1 k [\sin\eta_1 C(\eta_1, \eta) - \sigma \cos\eta_1 S(\eta_1, \eta)] \\ & + \tfrac{1}{2} p k^2 \{C^2(\eta_1, \eta) + S^2(\eta_1, \eta) + (1 - \varepsilon\varepsilon_1)[C^2(\sigma\eta_1) + S^2(\sigma\eta_1)]\} \\ & - \sigma q k^2 \{S(\sigma\eta)[\sin\eta + \varepsilon\varepsilon_1 C(\sigma\eta_1)] + C(\sigma\eta)[\cos\eta - \varepsilon\varepsilon_1 S(\sigma\eta_1)] \\ & - \varepsilon\varepsilon_1 [\cos\eta_1 C(\sigma\eta_1) + \sin\eta_1 S(\sigma\eta_1)] - 2(\sqrt{|\eta|} - \varepsilon\varepsilon_1 \sqrt{|\eta_1|})\}, \\ \beta = {} & v_1 k [\cos\eta_1 C(\eta_1, \eta) + \sigma \sin\eta_1 S(\eta_1, \eta)] \\ & + u_1 k [\sin\eta_1 C(\eta_1, \eta) - \sigma \cos\eta_1 S(\eta_1, \eta)] \\ & + \tfrac{1}{2} q k^2 \{C^2(\eta_1, \eta) + S^2(\eta_1, \eta) + (1 - \varepsilon\varepsilon_1)[C^2(\sigma\eta_1) + S^2(\sigma\eta_1)]\} \\ & + \sigma p k^2 \{S(\sigma\eta)[\sin\eta + \varepsilon\varepsilon_1 C(\sigma\eta_1)] + C(\sigma\eta)[\cos\eta - \varepsilon\varepsilon_1 S(\sigma\eta_1)] \\ & - \varepsilon\varepsilon_1 [\cos\eta_1 C(\sigma\eta_1) + \sin\eta_1 S(\sigma\eta_1)] - 2(\sqrt{|\eta|} - \varepsilon\varepsilon_1 \sqrt{|\eta_1|})\},\end{aligned} \tag{63}$$

$$\gamma = h^{-1}\zeta = \frac{\eta - \eta_1}{h} = \frac{r}{2}(t - t_1)(t + t_1 - 2t_0) = w_1(t - t_1) + \frac{1}{2} r(t - t_1)^2.$$

Fall 4. $h = 0$.

$$\begin{aligned}\alpha &= u_1(t - t_1) + \tfrac{1}{2} p(t - t_1)^2, \\ \beta &= v_1(t - t_1) + \tfrac{1}{2} q(t - t_1)^2, \\ \gamma &= w_1(t - t_1) + \tfrac{1}{2} r(t - t_1)^2.\end{aligned} \tag{64}$$

Mit (58), (59), (63), (64) sind für alle vier Fälle die Winkel α, β, γ berechnet. Aus ihnen ergeben sich nach (51) fünf Komponenten des Drehungsaffinors $\mathfrak{E}$, mit dem die jeweilige Stellung des Kreisels $\mathfrak{A}$

nach (45) aus der Anfangsstellung $\mathfrak{A}_1$ folgt. Die Eulerschen Winkel, durch welche sich der Übergang von der Anfangsstellung $\mathfrak{A}_1$ zur jeweils erreichten Stellung $\mathfrak{A}$ bewirken läßt, sind nunmehr aus (50) zu entnehmen. Damit ist die Bewegung des symmetrischen Kreisels unter der Wirkung von Drehkräften, welche bezüglich der selber beweglichen Hauptträgheitsachsen zeitfeste Komponenten haben, vollständig beschrieben.

(Eingegangen am 24. Oktober 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 3, S. 321—345 (1952).

Über das Einspannungsproblem in der projektiven und affinen Differentialgeometrie.

Von

Wilhelm Klingenberg in Kiel.

Wir betrachten im n-dimensionalen projektiven reellen Raum P_n die p-dimensionalen Flächen F_p $(1 \leqq p \leqq n-1)$. Bei Hyperflächen F_{n-1} und Kurven F_1 pflegt man für die Untersuchung der Eigenschaften in der Umgebung eines Punktes P ein örtliches, projektivinvariantes Basissystem festzulegen, d. h. die F_{n-1} bzw. F_1 in den P_n einzuspannen. Die Zielsetzung dieser Arbeit besteht darin, diese Einspannung für Flächen F_p mit beliebiger Dimension p zu behandeln, und zwar derart, daß für die Grenzfälle F_{n-1} und F_1 die bekannten projektiven (bzw. affinen) Basissysteme herauskommen. Hierüber gibt es meines Wissens noch keine abschließenden Untersuchungen [1]).

Um das Problem zu fixieren, erklären wir zunächst mit Hilfe des üblichen Begriffs von 1-tem Schmiegraum S_1 und $(i+1)$-tem Schmiegraum S_{i+1} $(i = 1, \ldots, m$; d. h. $S_{m+1} = P_n)$ den i-ten Normalenraum N_i als eine lineare Mannigfaltigkeit mit den Eigenschaften $S_i \cap N_i = 0$; $S_i \cup N_i = S_{i+1}$ [2]). Dazu erklären wir noch einen 0-ten Normalenraum N_0 durch $P \cap N_0 = 0$; $P \cup N_0 = S_1$. N_0 ist also eine $(p-1)$-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit in S_1, die nicht P enthält. — Während die S_i, S_{i+1} eindeutig mit der F_p verknüpft sind, ist dies für die N_0, N_i offenbar nicht der Fall. Unter dem Einspannungsproblem wollen wir damit jetzt die Frage nach einer eindeutigen, projektivinvarianten, nur von den inneren Eigenschaften der F_p abhängenden Festlegung der N_0, N_i verstehen.

[1]) Die Problemstellung findet sich schon bei G. Fubini. Vgl. G. Fubini-E. Čech, Geometria proiettiva differenziale, Bologna 1926/27, Fußnote S. 631. — V. G. Grove, A tensor analysis for a V_k in a projektive space S_n, Bull. Am. Math. Soc. **45** (1939), S. 385—398, behandelt das Problem als Anfangswertproblem von Differentialgleichungen: Durch die Vorgabe eines Basissystems in einem Punkt ist es für eine ganze Umgebung festgelegt. Die Willkür bei der Wahl der Anfangsbasis kann jedoch nicht befriedigen. — V. Hlavatý. Affine embedding theory I, II. III Proc. Acad. Wet., Amsterdam **52** (1949), Nr. 5, 7, 9 und Projektive geometrization of a system of partial differential equations (zit. als P. G.) I, II, III, IV ib. **53** (1950), Nr. 3, 4, 6, 6 löst das Einspannungsproblem nur für spezielle Flächenklassen.

[2]) $\cup$ und $\cap$ bezeichnet die Vereinigungs- und Durchschnittsbildung linearer Räume im P_n.

Wir zeigen, wie dies Problem durch m „Apolaritätsbedingungen" (die für F_{n-1} zu der bekannten Apolaritätsbedingung werden) zunächst soweit reduziert wird, daß die N_i nur noch von einem beliebig vorgebbaren N_0 abhängen. Dieses „polare Basissystem" hängt von Ableitungen bis zur $(2m+1)$-ten Ordnung ab. Für die F_{n-1} führt es gerade auf die kürzlich von G. Bol [3]) für die Behandlung der Hyperflächen zugrunde gelegten Normalenkongruenzen, die von einer beliebigen Normalen zweiter Art (wie G. Bol unsere N_0 nennt) abhängen. Er zeigt, daß N_0 und die von P und N_1 bestimmte Gerade polar sind bezüglich der in P erklärten Darboux-Quadriken. — Desgleichen hängt für F_1 unser polares Basissystem mit demjenigen zusammen, das G. Bol [4]) seiner „halbinvarianten" Behandlung der Kurventheorie zugrunde legt; und zwar besteht es aus den Ableitungen nach der bei einer festgehaltenen Normierung definierten Affinbogenlänge. Die Mannigfaltigkeit der polaren Basissysteme entspricht also hier den verschiedenen Normierungen.

Um auch N_0 festzulegen, geben wir eine weitere sog. 0-te Apolaritätsbedingung an. Sie ist für F_{n-1} und F_1 von den anderen Apolaritätsbedingungen abhängig, führt also hier nicht zu einer Festlegung von N_0. Man kann in diesen Fällen unter Heranziehung einer weiteren Ableitung N_0 auf verschiedene Weise nach dem Vorbild von G. Fubini, E. J. Wilczynski u. a. festlegen. — Für $p \neq n-1$ und $p \neq 1$ wird die erwähnte Bedingung jedoch i. a. N_0 festlegen. Das einfachste Beispiel liefert die F_2 im P_4, wo wir ein von Ableitungen bis zur 4. Ordnung abhängendes Basissystem erhalten (vgl. [44])). Wir hoffen, an anderer Stelle hierauf eingehen zu können [4a]).

Im n-dimensionalen affinen Raum E_n ist durch den Schnitt des Tangentialraums mit der uneigentlichen Hyperebene ein N_0 ausgezeichnet. Das hierdurch festgelegte polare Basissystem stellt also eine Lösung des Einspannungsproblems für die Affingeometrie dar. Für F_1 besteht es aus den Ableitungen nach der Affinbogenlänge, für F_{n-1} führt es zu der bekannten Affinnormalen von W. Blaschke und L. Berwald [5]) und für den allgemeineren Fall, daß der S_2 den E_n aufspannt, ist N_1 der von K. H. Weise [6]) angegebene Affinnormalenraum. — Wir bemerken

[3]) Zur tensoriellen Behandlung der projektiven Flächentheorie, Math. Ann. **122** (1950), S. 279—295. Vgl. auch [34]).

[4]) Invarianten linearer Differentialgleichungen, Abh. Math. Sem. Hamburg **16** (1949), S. 1—29. Vgl. auch [34]).

[4a]) Erscheint unter dem Titel „Über die 2-dimensionalen Flächen im 4-dimensionalen projektiven Raum" im Arch. der Math.

[5]) W. Blaschke, Differentialgeometrie Bd. 2, Berlin 1923.

[6]) Der Berührungstensor zweier Flächen und die Affingeometrie der F_p im A_n, Teil I, Math. Z. **43** (1938), S. 469—480; Teil II, Math. Z. **44** (1939), S. 161—184. Eine kurze Zusammenstellung der in unserem Zusammenhang wichtigen Ergebnisse von Weise bei W. Klingenberg, Zur affinen Differentialgeometrie I, Math. Z. **54** (1951), S. 65—80.

noch, daß sich unsere Überlegungen unmittelbar auf die F_p im n-dimensionalen linear-zusammenhängenden Raum L_n (wozu insbesondere der affin-zusammenhängende Raum A_n gehört) übertragen lassen und auch für diesen allgemeineren Fall das Einspannungsproblem lösen [7]).

§ 1.

Allgemeine Normalensysteme.

1. Schmiegräume und Normalenräume. Wir betrachten den *n-dimensionalen projektiven reellen Raum* P_n. Er werde durch $(n+1)$ homogene Koordinaten beschrieben, die wir zu dem *Ortspunkt* $\mathfrak{x}$ zusammenfassen. Allgemein verstehen wir unter einem *kontravarianten* bzw. *kovarianten Punkt* ein $(n+1)$-Tupel von Elementen, das sich bei der *Gruppe* $\mathfrak{G}(P_n)$ *der projektiven Transformation des* P_n kogredient bzw. kontragredient zu $\mathfrak{x}$ transformiert [8]). Wir bezeichnen diese Punkte durch kleine bzw. große deutsche Buchstaben.

Ist $\mathfrak{x}$ eine Funktion von p Parametern u^α $(\alpha = 1, \ldots, p)$

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^\alpha), \tag{1.1}$$

so nennen wir die dadurch definierte Mannigfaltigkeit eine *p-dimensionale Fläche* F_p. Wir wollen dabei für diese Funktionen die jeweils notwendigen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen machen und nur solche Punkte P betrachten, für die der von $\mathfrak{x}$ und den p Punkten $\partial_\alpha \mathfrak{x}$ [9]) aufgespannte Tangentialraum T p-dimensional ist. Dies wird dann auch für eine gewisse Umgebung von P der Fall sein, auf die wir unsere Untersuchungen beschränken wollen.

Durch die Gruppe der in der Umgebung von P umkehrbar-eindeutigen Parametertransformationen $u^\beta = u^\beta(\bar{u}^\alpha)$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, p)$ wird in T die *Gruppe* $\mathfrak{G}(T)$ der Transformationen

$$\bar{\partial}_\alpha \mathfrak{x} = c_\alpha^\beta \partial_\beta \mathfrak{x}; \quad c_\alpha^\beta = \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha} \tag{1.2}$$

induziert. Das tensorielle Verhalten gegenüber dieser Gruppe kennzeichnen wir durch die Indizes α, β, γ; λ, μ aus dem ersten Teil des griechischen Alphabets [10]); sie durchlaufen die Werte $1, \ldots, p$.

Die homogenen Koordinaten des Ortspunkts sind nur bis auf einen gemeinsamen Faktor $\sigma = \sigma(u^\alpha)$ festgelegt. Wir kennzeichnen das Transformationsverhalten bei der durch die *Umnormierungen*

$$\bar{\mathfrak{x}} = \sigma \mathfrak{x} \tag{1.3}$$

[7]) Dies bildet eine Ergänzung zu J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül, Berlin 1924, IV, § 18, wo die Einspannung im A_n von der Parameterwahl abhängig ist.

[8]) Ein kovarianter Punkt wird durch eine $(n-1)$-dimensionale Hyperebene repräsentiert.

[9]) ∂_α bezeichnet die partielle Ableitung nach u^α.

[10]) Falls diese Indizes kein tensorielles Transformationsverhalten anzeigen, wie z. B. bei Übertragungen, verwenden wir einen griechischen Kernbuchstaben.

definierten *Gruppe* $\mathfrak{G}(U)$ durch den Index $\circ$, der oben oder unten steht, je nachdem sich das betreffende Objekt bei einer Transformation (1.3) mit σ^{-1} oder σ multipliziert[10]). Für $\mathfrak{x}$ insbesondere schreiben wir damit künftig $\mathfrak{x}_\circ$.

Wir verstehen, wie üblich, unter dem 1-*ten Schmiegraum* S_1 den Tangentialraum T und unter dem $(i+1)$-*ten Schmiegraum* S_{i+1} $(i=1,\ldots)$ die von $\mathfrak{x}_\circ$ und den Ableitungen von $\mathfrak{x}_\circ$ bis einschließlich zur $(i+1)$-ten Ordnung aufgespannte lineare Mannigfaltigkeit[11]). Wir wollen nur Punkte P betrachten, für die es einen S_{m+1} gibt, der den P_n aufspannt. S_{m+1} sei der erste Schmiegraum mit dieser Eigenschaft; i soll damit künftig die Werte 1, ..., m durchlaufen. Ferner soll stets S_i ein echter Teilraum von S_{i+1} sein[12]). S_1 hat die Dimension p; S_{i+1} habe die Dimension $p+r_1+\cdots+r_i$. Dann sollen also die $r_i>0$ sein. Es gilt $p+r_1+\cdots+r_m=n$.

Unter einem *i-ten Normalenraum* N_i verstehen wir eine lineare Mannigfaltigkeit mit den Eigenschaften $S_i\cap N_i=0$; $S_i\cup N_i=S_{i+1}$. Dazu erklären wir einen 0-*ten Normalenraum* N_0 durch $P\cap N_0=0$; $P\cup N_0=S_1$[13]). Die Dimension der N_i ist offenbar r_i-1, d. h. sie enthalten r_i l. u. Punkte. Bei einer F_2 im P_3 z. B. ist also N_0 eine Gerade in der Tangentialebene T und N_1 ein Punkt außerhalb von T.

Während die S_i, S_{i+1}, wie aus ihrer Definition hervorgeht, eindeutig festgelegt sind, ist dies für die N_0, N_i nicht der Fall. Unser Ziel ist, auch die Normalenräume festzulegen. — Betrachten wir zunächst einen beliebig vorgegebenen N_0. N_0 muß sich jedenfalls mit Hilfe der Basispunkte $\mathfrak{x}_\circ$ und $\partial_\alpha\mathfrak{x}_\circ$ von T durch p Punkte der Form

$$\mathfrak{x}_{\circ\alpha}=\partial_\alpha\mathfrak{x}_\circ-\Gamma^\circ_{\circ\alpha}\mathfrak{x}_\circ \tag{1.4}$$

darstellen lassen. Die Koeffizienten $\Gamma^\circ_{\circ\alpha}$ sind dabei eindeutig festgelegt. Da N_0 nicht von der Darstellung der F_p durch Parameter und homogene Koordinaten abhängt, müssen sich die Punkte $\mathfrak{x}_{\circ\alpha}$ bei $\mathfrak{G}(T)$ und $\mathfrak{G}(U)$ in der durch die Indizes angedeuteten Weise transformieren, d. h.

$$\bar{\mathfrak{x}}_{\circ\alpha}=\bar\partial_\alpha\mathfrak{x}_\circ-\bar\Gamma^\circ_{\circ\alpha}\mathfrak{x}_\circ=\sigma\,c^\beta_\alpha\mathfrak{x}_{\circ\beta};\quad \bar\Gamma^\circ_{\circ\alpha}=\Gamma^\circ_{\circ\alpha}-\partial_\alpha\lg\sigma. \tag{1.5}$$

Daneben bilden aber auch die Punkte

$$\mathfrak{x}^*_{\circ\alpha}=\mathfrak{x}_{\circ\alpha}+a_\alpha\mathfrak{x}_\circ \tag{1.6}$$

einen N_0 und umgekehrt entspricht jedem N_0 genau eine solche *Sterntransformation* (1.6). — Wir beschreiben nun auch die N_i durch r_i

[11]) Vgl. zum Begriff des Schmiegraums neben G. Fubini-E. Čech [1]) S. 731 und V. Hlavatý [1]) P. G. I, S. 321 auch C. Burstin, Mehrdimensionale projektive Differentialgeometrie, Monatsh. Math. Phys. **37** (1930), S. 41—54.

[12]) Diese Voraussetzung, durch die allgemeine „Flachpunkte" ausgeschlossen werden, läßt sich übrigens vermeiden. Man kann sich aus den folgenden Überlegungen klarmachen, daß sich unsere Methoden auch zur Einspannung solcher singulärer Punkte eignen.

[13]) Bei F_{n-1} wird N_0 meist als Normale zweiter Art bezeichnet, z. B. G. Bol [3]), S. 279. In unserem Zusammenhang ist jedoch die obige Bezeichnung vorzuziehen.

Basispunkte $\mathfrak{n}_{\varrho_i}$ $(\varrho_i, \varrho_i' = 1, \ldots, r_i)$. Daneben spannen aber auch die Punkte

$$\tilde{\mathfrak{n}}_{\varrho_i} = d_{\varrho_i}^{\varrho_i'} \mathfrak{n}_{\varrho_i'} + b_{\varrho_i}^{\varrho_{i-1}} \mathfrak{n}_{\varrho_{i-1}} + \cdots + b_{\varrho_i}^{\circ\lambda} \mathfrak{x}_{\circ\lambda} + b_{\varrho_i}^{\circ} \mathfrak{x}_{\circ}; \quad \mathrm{Det}\,(d_{\varrho_i}^{\varrho_i'}) \neq 0 \tag{1.7}$$

einen $\tilde{N}_i$ auf, und wir erhalten mit diesen Transformationen sogar alle möglichen $\tilde{N}_i$. Die Gruppe dieser Transformationen läßt sich in das direkte Produkt zweier Gruppen mit den Transformationen

$$\mathfrak{n}_{\varrho_i}^* = \mathfrak{n}_{\varrho_i} + b_{\varrho_i}^{\varrho_{i-1}} \mathfrak{n}_{\varrho_{i-1}} + \cdots + b_{\varrho_i}^{\circ\lambda} \mathfrak{x}_{\circ\lambda} + b_{\varrho_i}^{\circ} \mathfrak{x}_{\circ} \tag{1.8}$$

und

$$\bar{\mathfrak{n}}_{\varrho_i} = d_{\varrho_i}^{\varrho_i'} \mathfrak{n}_{\varrho_i'}; \quad \mathrm{Det}\,(d_{\varrho_i}^{\varrho_i'}) \neq 0 \tag{1.9}$$

zerlegen. Die *Sterntransformationen* (1.8) bedeuten den Übergang zu einem neuen N_i^*, und umgekehrt entspricht jedem N_i^* eindeutig eine solche Transformation. Die *Strichtransformationen* (1.9) dagegen führen den N_i in sich über; sie bedeuten eine Basistransformation innerhalb des N_i. Die durch diese Substitutionen (1.9) definierte *i-te Normalenraumgruppe* $\mathfrak{G}(N_i)$ ist auf Grund der obigen Zerlegung offensichtlich unabhängig von der Wahl der N_i, sie ist also eindeutig der gegebenen Fläche zugeordnet. Das tensorielle Verhalten gegenüber $\mathfrak{G}(N_i)$ kennzeichnen wir durch die Indizes $\varrho_i, \sigma_i, \tau_i, \varrho_i', \sigma_i', \tau_i'$, u. ä.[10]); sie durchlaufen die Werte $1, \ldots, r_i$. Der Index i soll die Zugehörigkeit zu $\mathfrak{G}(N_i)$ anzeigen.

Wir haben also zweierlei Arten von Transformationen zu unterscheiden: Einmal die Strichtransformationen (1.3) (1.5) und (1.9) (zusammengefaßt zu den Gruppen $\mathfrak{G}(U)$, $\mathfrak{G}(T)$ und $\mathfrak{G}(N_i)$), die sich aus der von uns gewählten Darstellung von P, N_0 und N_i mit Hilfe von Basispunkten ergeben, und zum andern die Sterntransformationen (1.6) und (1.8), die die Willkür bei der Festlegung der N_0 und N_i kennzeichnen.

Zu einer vorgegebenen *kontravarianten Basis*

$$\mathfrak{x}_{\circ}, \mathfrak{x}_{\circ\alpha}, \mathfrak{n}_{\varrho i} \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.10}$$

gehört nach dem Dualitätsprinzip eindeutig eine *kovariante Basis*

$$\mathfrak{X}^{\circ}, \mathfrak{X}^{\circ\alpha}, \mathfrak{N}^{\varrho_i}, \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.11}$$

die durch die Gleichungen[14])

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{x}_{\circ} \circ \mathfrak{X}^{\circ} = 1; \quad \mathfrak{x}_{\circ\alpha} \circ \mathfrak{X}^{\circ} = 0; \quad \mathfrak{n}_{\sigma_i} \circ \mathfrak{X}^{\circ} = 0 \\
&\mathfrak{x}_{\circ} \circ \mathfrak{X}^{\circ\beta} = 0; \; \mathfrak{x}_{\circ\alpha} \circ \mathfrak{X}^{\circ\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}; \; \mathfrak{n}_{\sigma_i} \circ \mathfrak{X}^{\circ\beta} = 0 \\
&\mathfrak{x}_{\circ} \circ \mathfrak{N}^{\varrho_i} = 0; \; \mathfrak{x}_{\circ\alpha} \circ \mathfrak{N}^{\varrho_i} = 0; \; \mathfrak{n}_{\sigma_i} \circ \mathfrak{N}^{\varrho_i} = \delta_{\sigma_i}^{\varrho_i}; \; \mathfrak{n}_{\sigma_{i'}} \circ \mathfrak{N}^{\varrho_i} = 0 \quad (i' \neq i)
\end{aligned} \tag{1.12}$$

[14]) Das Symbol $\circ$ bezeichnet das skalare Produkt eines kovarianten und kontravarianten Punktes.

definiert wird. Das Transformationsverhalten bei $\mathfrak{G}(U)$, $\mathfrak{G}(T)$ und $\mathfrak{G}(N_i)$ wird durch die Stellung der Indizes angezeigt:

$$\begin{gathered}\overline{\mathfrak{X}}^{\circ} = \sigma^{-1}\mathfrak{X}^{\circ}; \quad \overline{\mathfrak{X}}^{\circ\alpha} = \sigma^{-1}\breve{c}^{\alpha}_{\beta}\mathfrak{X}^{\circ\beta}; \quad \overline{\mathfrak{R}}^{\varrho_i} = \breve{d}^{\varrho_i}_{\sigma_i}\mathfrak{R}^{\sigma_i} \\ \text{mit} \quad \breve{c}^{\alpha}_{\beta}c^{\gamma}_{\alpha} = \delta^{\gamma}_{\beta}; \quad \breve{d}^{\varrho_i}_{\sigma_i}d^{\tau_i}_{\varrho_i} = \delta^{\tau_i}_{\sigma_i}.\end{gathered} \tag{1.13}$$

Die Willkür in der Auswahl der N_0, N_i steckt natürlich auch in der kovarianten Basis. Man findet aus der Forderung, daß die Beziehungen (1.12) bei den Sterntransformationen (1.6) und (1.8) gültig bleiben sollen

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}^{*\circ} &= \mathfrak{X}^{\circ} + m_{\alpha}\mathfrak{X}^{\circ\alpha} + m^{\circ}_{\varrho_1}\mathfrak{R}^{\varrho_1} + \cdots && \cdots + m^{\circ}_{\varrho_m}\mathfrak{R}^{\varrho_m} \\ \mathfrak{X}^{*\circ\alpha} &= \mathfrak{X}^{\circ\alpha} + m^{\circ\alpha}_{\varrho_1}\mathfrak{R}^{\varrho_1} + \cdots && \cdots + m^{\circ\alpha}_{\varrho_m}\mathfrak{R}^{\varrho_m} \\ \mathfrak{R}^{*\varrho_i} &= && \mathfrak{R}^{\varrho_i} + m^{\varrho_i}_{\varrho_{i+1}}\mathfrak{R}^{\varrho_{i+1}} + \cdots + m^{\varrho_i}_{\varrho_m}\mathfrak{R}^{\varrho_m} \quad (i<m) \\ \mathfrak{R}^{*\varrho_m} &= && \mathfrak{R}^{\varrho_m},\end{aligned} \tag{1.14}$$

wobei die Koeffizienten sich sukzessive aus

$$\begin{aligned}&m^{\circ}_{\varrho_i} + b^{\varrho_{i-1}}_{\varrho_i}m^{\circ}_{\varrho_{i-1}} + \cdots + b^{\circ\alpha}_{\varrho_i}m_{\alpha} + b^{\circ}_{\varrho_i} = 0 \\ &m^{\circ\alpha}_{\varrho_i} + b^{\varrho_{i-1}}_{\varrho_i}m^{\circ\alpha}_{\varrho_{i-1}} + \cdots + b^{\varrho_1}_{\varrho_i}m^{\circ\alpha}_{\varrho_1} + b^{\circ\alpha}_{\varrho_i} = 0 \\ &m^{\varrho_i}_{\varrho_{i+l}} + b^{\varrho_{i+l-1}}_{\varrho_{i+l}}m^{\varrho_i}_{\varrho_{i+l-1}} + \cdots + b^{\varrho_{i+1}}_{\varrho_{i+l}}m^{\varrho_i}_{\varrho_{i+1}} + b^{\varrho_i}_{\varrho_{i+l}} = 0 \quad (1 \leqq l \leqq m-i)\end{aligned} \tag{1.15}$$

berechnen. Insbesondere gilt

$$m_{\alpha} = -a_{\alpha}; \quad m^{\circ\alpha}_{\varrho_1} = -b^{\circ\alpha}_{\varrho_1}; \quad m^{\varrho_{i-1}}_{\varrho_i} = -b^{\varrho_{i-1}}_{\varrho_i}. \tag{1.16}$$

2. Die B-Tensoren. Eine geometrische Bedeutung werden nur solche Objekte haben, die nicht von den Sterntransformationen abhängen. Ein wichtiges Beispiel hierfür sind die *i-ten B-Tensoren* $(i = 1, \ldots, m)$, die wir durch

$$B^{\varrho_i}_{\circ\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{i+1}} = \mathfrak{R}^{\varrho_i}\,\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_{i+1}}\mathfrak{x}_{\circ} = B^{\varrho_i}_{\circ(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{i+1})}{}^{15}) \tag{1.17}$$

definieren. Für Hyperflächen werden die B-Tensoren die Koeffizienten der quadratischen Grundform, vgl. § 3.3. Es gilt

$$\begin{aligned}\overline{B}^{\varrho_i}_{\circ\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{i+1}} &= \sigma\,\breve{d}^{\varrho_i}_{\sigma_i}c^{\beta_1}_{\alpha_1}c^{\beta_2}_{\alpha_2}\ldots c^{\beta_{i+1}}_{\alpha_{i+1}}B^{\sigma_i}_{\circ\beta_1\beta_2\ldots\beta_{i+1}} \\ B^{*\varrho_i}_{\circ\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{i+1}} &= B^{\varrho_i}_{\circ\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{i+1}}.\end{aligned} \tag{1.18}$$

[15]) Die B-Tensoren (1.17) entsprechen den Größen J und die Tensoren (1.30) den Größen H in der Arbeit: J. A. Schouten-E. R. van Kampen, Über die Krümmung einer V_m in V_n; eine Revision der Krümmungstheorie. Math. Ann. **105** (1931), S. 144—159. — Die runde Klammer um die $(i+1)$-Indizes bezeichnet den symmetrischen Teil der gegebenen Größe, dessen Komponenten man erhält, wenn man die Summe über die $(i+1)!$ durch Permutation der Indizes aus den gegebenen Komponenten entstehenden Elemente bildet und durch $(i+1)!$ dividiert. (1.17) besagt also, daß der i-te B-Tensor in den Indizes von $\mathfrak{G}(T)$ symmetrisch ist.

Das folgt aus den Formeln für die Sterntransformation und aus

$$\text{(1.19)} \qquad \begin{aligned} \mathfrak{R}^{\varrho_{i+l}}_{\circ} \partial_{a_1} \partial_{a_2} \dots \partial_{a_{i+1}} \mathfrak{x}_{\circ} &= 0 \\ \mathfrak{R}^{\varrho_i}_{\circ} \partial_{a_1} \partial_{a_2} \dots \partial_{a_{i+1-l}} \mathfrak{x}_{\circ} &= 0 \end{aligned} \qquad \text{für } l > 0,$$

einer Folge der Definition der $\mathfrak{n}_{\varrho_i}$ und $\mathfrak{R}^{\varrho_i}$ mit Hilfe der S_{i+1}.

Wir bilden zu (1.17) die *komplementären i-ten B-Tensoren* $\overset{\circ}{B}{}^{\varrho_i}_{\varrho_i}{}^{a_1 a_2 \dots a_{i+1}}$ mit den Eigenschaften

$$\text{(1.20)} \qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad B^{\varrho_i}_{\circ a_1 a_2 \dots a_{i+1}} \overset{\circ}{B}{}^{a_1 a_2 \dots a_{i+1}}_{\sigma_i} = p \delta^{\varrho_i}_{\sigma_i} \\ &\text{(b)} \quad B^{\varrho_i}_{\circ a a_2 \dots a_{i+1}} \overset{\circ}{B}{}^{\beta a_2 \dots a_{i+1}}_{\varrho_i} = r_i \delta^{\beta}_{\alpha} \end{aligned}$$ [16]).

Dazu bilden wir zunächst [17])

$$\text{(1.21)} \qquad C^{\varrho_i \sigma_i}_{\circ\circ a_1 \dots a_{2i+2}} = B^{\varrho_i}_{\circ (a_1 a_2 \dots a_{i+1}} B^{\sigma_i}_{\circ a_{i+2} a_{i+3} \dots a_{2i+2})} .$$

Diese Tensoren sind auch in den Indizes ϱ_i, σ_i symmetrisch. Hiermit wird [18])

$$\text{(1.22)} \qquad \begin{aligned} T^{\varrho_1 \dots \varrho_{2p}}_{\underbrace{(1\dots p)}^{2i+1}(\cdot)^{2p}} &= \frac{1}{p!} \delta^{\alpha_1 1 \dots a_1 p}_{\underbrace{1\dots p}} \dots \delta^{\alpha_{2i+2\,1} \dots a_{2i+2\,p}}_{\underbrace{1\dots p}} C^{(\varrho_1 \varrho_2}_{\circ\circ a_{11} \dots a_{2i+2\,1}} \dots C^{\varrho_{2p-1} \varrho_{2p})}_{\circ\circ a_{1p} \dots a_{2i+2\,p}} \text{ [19])}, \end{aligned}$$

[16]) Faßt man die Gleichungen (1.20) als Bedingungsgleichungen für die komplementären B-Tensoren auf, so sind diese dadurch im allg. nicht eindeutig definiert. Um uns zu fixieren, definieren wir daher in den Gleichungen (1.21) bis (1.28) explizit aus den gegebenen i-ten B-Tensoren symmetrische komplementäre B-Tensoren mit dem durch die Indizes angezeigten Transformationsverhalten. Wenn diese Definition auch nicht frei von Willkür ist (vgl. für $i = 1$ [17])), so wird durch sie jedoch für Punkte mit $T_{(i)} \neq 0$ (vgl. (1.23)) die Existenz solcher Tensoren nachgewiesen, die im Falle der F_1 und F_{n-1} zu dem üblichen Begriff von komplementärem Tensor führen (vgl. § 3). Bei einem ersten Studium der Arbeit ist es möglich, die Existenz der komplementären B-Tensoren einfach hinzunehmen und die Ausführungen bis (1.28) zu übergehen.

[17]) Mit der Bildung der Elemente (1.21) wollen wir zu Tensoren mit einer geraden Anzahl von Indizes von $\mathfrak{G}(T)$ gelangen. Für den Fall $i = 1$ (und ebenso $i = 2q + 1$) ist dies schon für die B-Tensoren der Fall. Hieraus ergibt sich der von unserem Ansatz verschiedene Ansatz zur Definition komplementärer B-Tensoren bei K. H. Weise. Vgl. W. Klingenberg [6]), S. 67 f.

[18]) In den Formeln (1.22) bis (1.27) lassen wir der Übersichtlichkeit halber bei den Indizes von $\mathfrak{G}(N_i)$ das i fort, also z. B. statt ϱ_{i_1}, ϱ_{i_2} usw. ϱ_1, ϱ_2 usw. Dabei sollen sich alle Indizes auf ein festes i beziehen. Das gleiche gilt für r statt r_i.

[19]) Der Index $\underbrace{1\dots p}$ [bzw. $\underbrace{1\dots r}$] zeigt ein p-stufiges [bzw. r-stufiges] Transformationsverhalten bei $\mathfrak{G}(T)$ [bzw. $\mathfrak{G}(N_i)$] an, also die Multiplikation oder Division mit $\mathrm{Det}(c^{\varkappa}_{\alpha})$ [bzw. $\mathrm{Det}(d^{\varrho}_{\sigma})$], je nachdem der Index oben oder unten steht. — $\underbrace{(1\dots p)}^{l}$ bzw. $\underbrace{(1\dots r)}^{l}$ bzw. $(\,)^l$ stehen als Abkürzung für l Indizes.

$\delta^{a_1 \dots a_p}_{\underbrace{1\dots p}}$ [bzw. $\delta^{\varrho_1 \dots \varrho_r}_{\underbrace{1\dots r}}$] ist das verallgemeinerte Kronecker-Symbol. Es hat den Wert 1 bzw. 0 bzw. -1, jenachdem $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ [bzw. $\varrho_1, \dots, \varrho_r$] eine gerade bzw. keine bzw. eine ungerade Permutation der Zahlen $1, \dots, p$ [bzw. $1, \dots, r$] ist. $\delta^{\underbrace{1\dots p}}_{a_1 \dots a_p}$ [bzw. $\delta^{\underbrace{1\dots r}}_{\varrho_1 \dots \varrho_r}$] ist ebenso erklärt.

ein in allen Indizes symmetrischer Tensor. Wenn die Determinante $T_{(i)}$ [20]), die durch

$$(1.23)\qquad \underbrace{T}_{(1\,..\,p)^{(2i+2)r}\,(\circ)^{2pr}}^{(1\,..\,r)^{2p}} = \frac{1}{r!}\,\delta^{1\,..\,r}_{\varrho_{11}\,..\,\varrho_{1r}}\cdot\,..\,\delta^{1\,..\,r}_{\varrho_{2p1}\,..\,\varrho_{2pr}}\,\underbrace{T^{\varrho_{11}\,..\,\varrho_{2p1}}}_{(1\,..\,p)^{2i+2}\,(\circ)^{2p}}\cdot\,..\,\underbrace{T^{\varrho_{1r}\,..\,\varrho_{2pr}}}_{(1\,..\,p)^{2i+2}\,(\circ)^{2p}}$$ [19])

gegeben ist, nicht verschwindet, können wir die Elemente

$$(1.24)\qquad \underbrace{\breve{T}}_{\varrho_1\,..\,\varrho_{2p}}^{(1\,..\,p)^{2i+2}\,(\circ)^{2p}} = \frac{1}{(r-1)!}\,\frac{1}{T_{(i)}}\,\delta^{1\,..\,r}_{\varrho_1\varrho_{12}\cdot\varrho_{1r}}\cdot\,..\,\delta^{1\,..\,r}_{\varrho_{2p}\varrho_{2p2}\,..\,\varrho_{2pr}}\,\underbrace{T^{\varrho_{12}\,..\,\varrho_{2p2}}}_{(1\,..\,p)^{2i+2}\,(\circ)^{2p}}\cdot\,..\,\underbrace{T^{\varrho_{1r}\,..\,\varrho_{2pr}}}_{(1\,..\,p)^{2i+2}\,(\circ)^{2p}}$$

bilden, die zu den Elementen (1. 22) komplementär sind:

$$(1.25)\qquad \underbrace{T^{\varrho\varrho_2\cdot\varrho_{2p}}}_{(1\,..\,p)^{2i+1}\,(\circ)^{2p}}\,\underbrace{\breve{T}}_{\circ\varrho_2\cdot\varrho_{2p}}^{(1\,..\,p)^{2i+2}\,(\circ)^{2p}} = \delta^{\varrho}_{\circ}.$$

Hiermit bilden wir die komplementären Elemente von (1.21):

$$(1.26)\qquad \breve{C}^{\circ\circ\alpha_1\,..\,\alpha_{2i+2}}_{\varrho_1\varrho_2} =$$

$$\frac{1}{(p-1)!}\,\underbrace{\delta^{\alpha_1\alpha_{12}\cdot\alpha_{1p}}_{1\,..\,p}}\cdot\,..\,\underbrace{\delta^{\alpha_{2i+2}\alpha_{2i+22}\cdot\alpha_{2i+2p}}_{1\,..\,p}}\,C^{\varrho_3\varrho_4}_{\circ\circ\alpha_{12}\,..\,\alpha_{2i+22}}\cdot\,..\,C^{\varrho_{2p-1}\varrho_{2p}}_{\circ\circ\alpha_{1p}\,..\,\alpha_{2i+2p}}\,\underbrace{\breve{T}}_{\varrho_1\varrho_2\varrho_3\varrho_4\,..\,\varrho_{2p-1}\varrho_{2p}}^{(1\,..\,p)^{2i+2}\,(\circ)^{2p}}.$$

Diese haben die Eigenschaften

$$(1.27)\qquad \begin{aligned} &(a)\quad C^{\varrho\varrho_2}_{\circ\circ\,\alpha_1\,..\,\alpha_{2i+2}}\,\breve{C}^{\circ\circ\alpha_1\,..\,\alpha_{2i+2}}_{\circ\varrho_2} = p\,\delta^{\varrho}_{\circ}\\ &(b)\quad C^{\varrho_1\varrho_2}_{\circ\circ\,\alpha\alpha_2\cdot\alpha_{2i+2}}\,\breve{C}^{\circ\circ\beta\alpha_2\cdot\alpha_{2i+2}}_{\varrho_1\varrho_2} = r\,\delta^{\beta}_{\alpha}. \end{aligned}$$

Die linke Seite von (1.27a) läßt sich nämlich bis auf den Faktor p in der Form (1. 25) schreiben, wenn man (1. 22) und (1. 26) benutzt. Die Symmetrie der ϱ-Indizes in (1.22) gilt dabei wegen der Symmetrie von (1. 24) und deshalb, weil man zwei Terme $C_{\circ\circ}$ [21]) vertauschen kann, ohne daß sich der Ausdruck ändert, da er sich bei einer Umbenennung der α-Summationsindizes nur mit $(-1)^{2i+2}=1$ multipliziert. — Die Gültigkeit von (1. 27 b) folgt für $\alpha \neq \beta$ daraus, daß auf der linken Seite, wenn wir (1. 26) einsetzen, immer zwei $C_{\circ\circ}$ mit gleichem ersten Index α vorkommen müssen. Vertauscht man in einem solchen Ausdruck A diese beiden $C_{\circ\circ}$, so multipliziert sich A bei einer Umbenennung der Summationsindizes mit $(-1)^{2i+1} = -1$; andererseits geht A dabei in sich über, d. h. $A = 0$. Ist dagegen $\alpha = \beta$, so sind die ersten Indizes der $C_{\circ\circ}$ alle untereinander verschieden; sie bilden eine Permutation der Zahlen $1, \ldots, p$. Würde über $\alpha = \beta$ summiert, so käme wegen (1. 27 a) rp heraus. Da dies nicht der Fall ist, nur der Bruchteil $\frac{1}{p}$ hiervon, q. e. d.

[20]) Wir benutzen $T_{(i)}$ als Abkürzung für das das Transformationsverhalten anzeigende Symbol (1.23).

[21]) Dies steht in diesem Absatz als Abkürzung für (1.21).

Die komplementären B-Tensoren definieren wir jetzt durch [22])

$$\breve{B}_{\varrho_i}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}} = B_{\circ \alpha_{i+2} \alpha_{i+3} \dots \alpha_{2i+2}}^{\sigma_i} \breve{C}_{\varrho_i \sigma_i}^{\circ \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1} \alpha_{i+2} \alpha_{i+3} \dots \alpha_{2i+2}}. \tag{1.28}$$

Die Eigenschaften (1.20) folgen mit (1.21) unmittelbar aus (1.27). *Wir wollen künftig nur solche F_p betrachten, für die die Determinanten $T_{(i)}$ nicht verschwinden, für die also die komplementären B-Tensoren existieren.* — Wir erwähnen noch die Formel

$$\partial_\alpha \lg T_{(i)} = 2 \breve{B}_{\varrho_i}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}} \partial_\alpha B_{\circ \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}}^{\varrho_i}, \tag{1.29}$$

die sich aus (1.21) bis (1.28) ergibt [23]). Sie stellt eine Verallgemeinerung der bekannten Formel für die logarithmische Ableitung der Determinante eines Tensors zweiten Grades dar.

Wir führen außerdem noch die Tensoren [15])

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad B_{\varrho_{i-1} \alpha}^{\varrho_i} = B_{\circ \alpha \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}}^{\varrho_i} \breve{B}_{\varrho_{i-1}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{i+1}} && (i > 1) \\ &\text{(b)} \quad \breve{B}_{\varrho_i}^{\varrho_{i-1} \alpha} = \breve{B}_{\varrho_i}^{\circ \alpha \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}} B_{\circ \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}}^{\varrho_{i-1}} && (i > 1) \end{aligned} \tag{1.30}$$

ein. Die $B_{\varrho_{i-1} \alpha}^{\varrho_i}$ können wir auch direkt definieren durch

$$B_{\varrho_{i-1} \alpha}^{\varrho_i} = \partial_\alpha \mathfrak{n}_{\varrho_{i-1}} \circ \mathfrak{R}^{\varrho_i}. \tag{1.31}$$

Denn jedenfalls müssen sich die $\partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_i} \mathfrak{x}_\circ$ durch die $\mathfrak{n}_{\varrho_{i-1}}$ und $\mathfrak{x}_\circ$, $\mathfrak{x}_{\circ \alpha}$, $\mathfrak{n}_{\varrho_{i-1}-l}$ mit $l > 0$ ausdrücken lassen. Dabei treten als Koeffizienten bei $\mathfrak{n}_{\varrho_{i-1}}$ gerade die B-Tensoren auf:

$$\partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_i} \mathfrak{x}_\circ \equiv B_{\circ \alpha_1 \dots \alpha_i}^{\varrho_{i-1}} \mathfrak{n}_{\varrho_{i-1}} (\mathfrak{n}_{\varrho_{i-2}}, \dots, \mathfrak{x}_\circ) \text{ [24])} \qquad (i > 1). \tag{1.32a}$$

Dies können wir nach den $\mathfrak{n}_{\varrho_{i-1}}$ auflösen:

$$\mathfrak{n}_{\varrho_{i-1}} \equiv \frac{1}{p} \breve{B}_{\varrho_{i-1}}^{\circ \alpha_1 \dots \alpha_i} \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_i} \mathfrak{x}_\circ (\mathfrak{n}_{\varrho_{i-2}}, \dots, \mathfrak{x}_\circ) \qquad (i > 1). \tag{1.32b}$$

Und hieraus folgt unmittelbar die Äquivalenz von (1.31) und (1.30a).

Entsprechend gilt auf Grund von (1.31):

$$\partial_\alpha \mathfrak{n}_{\varrho_{i-1}} \equiv B_{\varrho_{i-1} \alpha}^{\varrho_i} \mathfrak{n}_{\varrho_i} (\mathfrak{n}_{\varrho_{i-1}}, \dots, \mathfrak{x}_\circ). \qquad (i > 1) \tag{1.33a}$$

Die Auflösung nach den $\mathfrak{n}_{\varrho_i}$ hat die Form

$$\mathfrak{n}_{\varrho_i} \equiv \frac{1}{r_{i-1}} \breve{B}_{\varrho_i}^{\varrho_{i-1} \alpha} \partial_\alpha \mathfrak{n}_{\varrho_{i-1}} (\mathfrak{n}_{\varrho_{i-1}}, \dots, \mathfrak{x}_\circ), \qquad (i > 1) \tag{1.33b}$$

wie man mit Hilfe von (1.32) erkennt. Hieraus folgt

$$B_{\varrho_{i-1} \alpha}^{\varrho_i} \breve{B}_{\sigma_i}^{\varrho_{i-1} \alpha} = r_{i-1} \delta_{\sigma_i}^{\varrho_i}. \qquad (i > 1) \tag{1.34}$$

[22]) Der Index i bei ϱ_i, σ_i, τ_i usw. kennzeichnet jetzt wieder die Zugehörigkeit zu $\mathfrak{G}(N_i)$.

[23]) Für $i = 1$ vgl. W. KLINGENBERG [6]), S. 71.

[24]) $\equiv$ bezeichnet die Kongruenz nach dem von den Punkten in der Klammer aufgespannten linearen Raum.

3. **Die Übertragungen.** Unter einer *Größe* wollen wir ein sich bei den Gruppen $\mathfrak{G}(P_n)$, $\mathfrak{G}(T)$, $\mathfrak{G}(U)$ und $\mathfrak{G}(N_i)$ tensoriell verhaltendes Objekt verstehen[25]). Wenn wir eine Größe als Funktion der u^α differenzieren, dann erhalten wir i. a. nicht wieder eine Größe. Wir wollen deshalb statt der gewöhnlichen Ableitung eine kovariante Ableitung mit Hilfe von Übertragungen so erklären, daß durch sie einer Größe eine um einen kovarianten Index von $\mathfrak{G}(T)$ vermehrte Größe zugeordnet wird. Dabei benötigen wir aber nicht nur Übertragungen für $\mathfrak{G}(T)$, sondern auch für $\mathfrak{G}(U)$ und $\mathfrak{G}(N_i)$; denn neben den c_β^α sind auch die Transformationselemente σ und $d_{\varrho_i}^{\varrho_i}$ Funktionen von u^α.

Unter einem *System Γ von Übertragungen* verstehen wir eine Menge von Funktionen $\Gamma_{\circ\gamma}^{\circ}$, $\Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda}$, $\Gamma_{\varrho_i\gamma}^{\sigma_i}$, die sich bei $\mathfrak{G}(U)$, $\mathfrak{G}(T)$ und $\mathfrak{G}(N_i)$ in der Form

$$
\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{\circ\gamma}^{\circ} &= (\Gamma_{\circ\gamma'}^{\circ} + \partial_{\gamma'} \lg \sigma)\, c_\gamma^{\gamma'} \\
\bar{\Gamma}_{\alpha\gamma}^{\lambda} &= (\Gamma_{\alpha'\gamma'}^{\lambda'} c_\alpha^{\alpha'} \breve{c}_{\lambda'}^{\lambda} + \breve{c}_\alpha^\mu \partial_{\gamma'} c_\mu^\lambda)\, c_\gamma^{\gamma'} \\
\bar{\Gamma}_{\varrho_i\gamma}^{\sigma_i} &= (\Gamma_{\varrho_i'\gamma'}^{\sigma_i'} d_{\varrho_i}^{\varrho_i'} \breve{d}_{\sigma_i'}^{\sigma_i} + \breve{d}_{\varrho_i}^{\tau_i} \partial_{\gamma'} d_{\tau_i}^{\sigma_i})\, c_\gamma^{\gamma'}
\end{aligned}
\tag{1.35}
$$

transformieren. Die *kovariante Ableitung*, angezeigt durch das Symbol ∇_γ, erklären wir hiermit in der üblichen Weise. Als für später wichtiges Beispiel geben wir die kovariante Ableitung der Tensoren $B_{\circ\alpha\beta}^{\varrho_1}$ und $B_{\varrho_{i-1}\alpha}^{\varrho_i}$ an, mit der wir die *A-Tensoren* definieren:

$$
\begin{aligned}
A_{\circ\alpha\beta\gamma}^{\varrho_1} &= \nabla_\gamma B_{\circ\alpha\beta}^{\varrho_1} = \partial_\gamma B_{\circ\alpha\beta}^{\varrho_1} + B_{\circ\alpha\beta}^{\sigma_1} \Gamma_{\sigma_1\gamma}^{\varrho_1} - B_{\circ\lambda\beta}^{\varrho_1} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} - B_{\circ\alpha\lambda}^{\varrho_1} \Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda} - B_{\circ\alpha\beta}^{\varrho_1} \Gamma_{\circ\gamma}^{\circ} \\
A_{\varrho_{i-1}\alpha\gamma}^{\varrho_i} &= \nabla_\gamma B_{\varrho_{i-1}\alpha}^{\varrho_i} = \partial_\gamma B_{\varrho_{i-1}\alpha}^{\varrho_i} + B_{\varrho_{i-1}\alpha}^{\sigma_i} \Gamma_{\sigma_i\gamma}^{\varrho_i} - B_{\sigma_{i-1}\alpha}^{\varrho_i} \Gamma_{\varrho_{i-1}\gamma}^{\sigma_{i-1}} - B_{\varrho_{i-1}\lambda}^{\varrho_i} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} \\
&\qquad (i>1).
\end{aligned}
\tag{1.36}
$$

Das ∇_γ-Symbol hat offenbar die üblichen Eigenschaften eines Differentiationssymbols.

Wo bekommen wir nun ein System Γ her? Es gilt: *Durch eine Basis $\mathfrak{B}$* [26]) *wird ein System von Übertragungen, das zu $\mathfrak{B}$ gehörende System $\Gamma(\mathfrak{B})$, induziert:*

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\circ\gamma}^{\circ} &= \partial_\gamma \mathfrak{x}_\circ \circ \mathfrak{X}^\circ && \text{d. h. } \nabla_\gamma \mathfrak{x}_\circ \circ \mathfrak{X}^\circ = 0 \\
\Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} &= (\partial_\gamma \mathfrak{x}_{\circ\alpha} - \Gamma_{\circ\gamma}^{\circ} \mathfrak{x}_{\circ\alpha}) \circ \mathfrak{X}^{\circ\lambda}\ ^{27}) && \text{d. h. } \nabla_\gamma \mathfrak{x}_{\circ\alpha} \circ \mathfrak{X}^{\circ\lambda} = 0 \\
\Gamma_{\varrho_i\gamma}^{\sigma_i} &= \partial_\gamma \mathfrak{n}_{\varrho_i} \circ \mathfrak{N}^{\sigma_i} && \text{d. h. } \nabla_\gamma \mathfrak{n}_{\varrho_i} \circ \mathfrak{N}^{\sigma_i} = 0.
\end{aligned}
\tag{1.37}
$$

Man prüft leicht nach, daß sich diese Objekte in der Tat in der Form (1.35) transformieren. — In (1.37) sind die $\Gamma_{\circ\gamma}^{\circ}$ offenbar gerade mit den ebenso bezeichneten Koeffizienten in (1.4) identisch. Daß diese

---

[25]) Dabei sollen auch p-stufige und r_i-stufige Indizes von $\mathfrak{G}(T)$ und $\mathfrak{G}(N_i)$ zugelassen sein, d. h. sog. Tensordichten.

[26]) Darunter verstehen wir eine kontravariante Basis (1.10) mit der zugehörigen kovarianten Basis (1.11).

[27]) Hier werden also die vorher zu definierenden $\Gamma_{\circ\gamma}^{\circ}$ verwandt.

sich wie Übertragungen für $\mathfrak{G}(U)$ transformieren, geht schon aus (1.5) hervor. Sind umgekehrt solche $\Gamma^{\circ}_{\circ\gamma}$ gegeben, so bestimmen die damit definierten Punkte $\mathfrak{x}_{\circ\gamma}$ einen N_0. *Die N_0 und die Übertragungen $\Gamma^{\circ}_{\circ\gamma}$ entsprechen sich also umkehrbar eindeutig.* — Mit (1.4) können wir auch die $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma}$ in (1.37) in der symmetrischen Form schreiben

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma} = \partial_\gamma \partial_\alpha \mathfrak{x}_{\circ} \circ \mathfrak{X}^{\circ\lambda} - 2\,\delta^{\lambda}_{(\alpha}\,\Gamma^{\circ}_{\circ\gamma)} = \Gamma^{\lambda}_{\gamma\alpha}. \tag{1.38}$$

Als eine gewisse Umkehrung der Zuordnung $\mathfrak{B} \to \Gamma(\mathfrak{B})$ durch (1.37) gilt, *daß durch ein System Γ eine Basis, die zu Γ gehörende Basis $\mathfrak{B}(\Gamma)$, induziert wird*[28]:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x}_{\circ\alpha} &= \nabla_\alpha \mathfrak{x}_{\circ} = \partial_\alpha \mathfrak{x}_{\circ} - \Gamma^{\circ}_{\circ\alpha}\mathfrak{x}_{\circ} \\
\mathfrak{n}_{\varrho_1} &= \frac{1}{p}\,\breve{B}^{\circ\alpha\gamma}_{\varrho_1}\,\nabla_\gamma \mathfrak{x}_{\circ\alpha} = \frac{1}{p}\,\breve{B}^{\circ\alpha\gamma}_{\varrho_1}\,(\partial_\gamma \mathfrak{x}_{\circ\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma}\mathfrak{x}_{\circ\lambda} - \Gamma^{\circ}_{\circ\gamma}\mathfrak{x}_{\circ\alpha}) \\
\mathfrak{n}_{\varrho_i} &= \frac{1}{r_{i-1}}\,\breve{B}^{\varrho_{i-1}\gamma}_{\varrho_i}\,\nabla_\gamma \mathfrak{n}_{\varrho_{i-1}} = \frac{1}{r_{i-1}}\,\breve{B}^{\varrho_{i-1}\gamma}_{\varrho_i}\,(\partial_\gamma \mathfrak{n}_{\varrho_{i-1}} - \Gamma^{\sigma_{i-1}}_{\varrho_{i-1}\gamma}\mathfrak{n}_{\sigma_{i-1}}) \quad (i>1).
\end{aligned} \tag{1.39}$$

4. Die Ableitungsgleichungen. Die Ableitungsgleichungen für eine Basis $\mathfrak{B}$ mit der zugehörigen Übertragung $\Gamma(\mathfrak{B})$ lauten

$$\begin{aligned}
\nabla_\gamma \mathfrak{x}_{\circ} &= \mathfrak{x}_{\circ\gamma} \\
\nabla_\gamma \mathfrak{x}_{\circ\beta} &= B^{\varrho_1}_{\circ\beta\gamma}\,\mathfrak{n}_{\varrho_1} + C_{\beta\gamma}\,\mathfrak{x}_{\circ} \\
\nabla_\gamma \mathfrak{n}_{\varrho_i} &= B^{\varrho_{i+1}}_{\varrho_i\gamma}\,\mathfrak{n}_{\varrho_{i+1}} + C^{\varrho_{i-1}}_{\varrho_i\gamma}\,\mathfrak{n}_{\varrho_{i-1}} + \cdots + C^{\lambda}_{\varrho_i\gamma}\mathfrak{x}_{\circ\lambda} + C^{\circ}_{\varrho_i\gamma}\mathfrak{x}_{\circ} \qquad (i<m) \\
\nabla_\gamma \mathfrak{n}_{\varrho_m} &= C^{\varrho_{m-1}}_{\varrho_m\gamma}\,\mathfrak{n}_{\varrho_{m-1}} + \cdots \qquad + C^{\lambda}_{\varrho_m\gamma}\mathfrak{x}_{\circ\lambda} + C^{\circ}_{\varrho_m\gamma}\mathfrak{x}_{\circ}.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

[28]) Genau genommen wird in (1.39) die Übertragung $\Gamma^{\sigma_m}_{\varrho_m\gamma}$ für $\mathfrak{G}(N_m)$ gar nicht benötigt. Um das Verhältnis der Zuordnungen $\mathfrak{B} \to \Gamma(\mathfrak{B})$ durch (1.37) und $\Gamma \to \mathfrak{B}(\Gamma)$ durch (1.39) zu untersuchen, wollen wir deshalb das *reduzierte System Γ_r von Übertragungen* einführen, daß aus einem System Γ ohne eine Übertragung $\Gamma^{\sigma_m}_{\varrho_m\gamma}$ besteht. Wir nennen Γ_r und Γ' äquivalent, $\Gamma_r \sim \Gamma'_r$, wenn $\mathfrak{B}(\Gamma_r) = \mathfrak{B}(\Gamma'_r)$ ist. Aus (1.39) folgt, daß $\Gamma_r \sim \Gamma'_r$ gleichbedeutend ist mit

$$\Gamma^{\circ}_{\circ\alpha} = \Gamma'^{\circ}_{\circ\alpha};\ \breve{B}^{\circ\alpha\beta}_{\varrho}\,(\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - \Gamma'^{\lambda}_{\alpha\beta}) = 0;\ \breve{B}^{\varrho_{i-1}\gamma}_{\varrho_i}\,(\Gamma^{\sigma_{i-1}}_{\varrho_{i-1}\gamma} - \Gamma'^{\sigma_{i-1}}_{\varrho_{i-1}\gamma}) = 0 \qquad (i>1).$$

Wir nennen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ äquivalent, $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B}'$, wenn $\Gamma_r(\mathfrak{B}) = \Gamma_r(\mathfrak{B}')$ ist. Wie man aus (1.37) abliest, ist $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B}'$ gleichbedeutend mit

$$\mathfrak{x}_{\circ\alpha} = \mathfrak{x}'_{\circ\alpha};\ \mathfrak{n}_{\varrho_1} \equiv \mathfrak{n}'_{\varrho_1}(\mathfrak{x}_{\circ});\ \mathfrak{n}_{\varrho_i} \equiv \mathfrak{n}'_{\varrho_i}(\mathfrak{n}_{\varrho_{i-2}}, \ldots, \mathfrak{x}_{\circ\alpha}, \mathfrak{x}_{\circ}) \qquad (i>1).$$

Bei den Zuordnungen $\mathfrak{B} \to \Gamma_r(\mathfrak{B})$ und $\Gamma_r \to \mathfrak{B}(\Gamma_r)$ gelten nun folgende Beziehungen, wie man leicht nachprüft:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_r \to \mathfrak{B}(\Gamma_r) \to \Gamma'_r(\mathfrak{B}(\Gamma_r)) \sim \Gamma_r \to \mathfrak{B}'(\Gamma'_r) = \mathfrak{B}(\Gamma_r) \\
&\mathfrak{B} \to \Gamma_r(\mathfrak{B}) \to \mathfrak{B}'(\Gamma_r(\mathfrak{B})) \sim \mathfrak{B} \to \Gamma'_r(\mathfrak{B}') = \Gamma_r(\mathfrak{B}).
\end{aligned}$$

Hieraus lesen wir ab: Die Klassen äquivalenter Γ_r und die Klassen äquivalenter $\mathfrak{B}$ entsprechen sich umkehrbar eindeutig. Jede Klasse äquivalenter Γ_r wird durch genau ein zu einer Basis $\mathfrak{B}$ gehörendes System $\Gamma_r(\mathfrak{B})$ und jede Klasse äquivalenter $\mathfrak{B}$ durch genau eine zu einer Übertragung Γ_r gehörende Basis $\mathfrak{B}(\Gamma_r)$ repräsentiert.

Die Gestalt dieser Gleichungen ergibt sich aus (1.31) und (1.37). Ist insbesondere $\mathfrak{B}$ eine zu einer Übertragung gehörende Basis $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\Gamma')$, so gilt außerdem für die Koeffizienten

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{B}{}^{\beta\gamma}_{\varrho_1} C_{\beta\gamma} = 0\,; \quad \overset{\circ}{B}{}^{\varrho_i\gamma}_{\varrho_{i+1}} C^{\varrho_{i-l}}_{\varrho_i\gamma} = 0 \ (1 \leqq l \leqq i-1)\,; \\ &\overset{\circ}{B}{}^{\varrho_i\gamma}_{\varrho_{i+1}} C^{\lambda}_{\varrho_i\gamma} = \overset{\circ}{B}{}^{\varrho_i\gamma}_{\varrho_{i+1}} C^{\varrho}_{\varrho_i\gamma} = 0. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Denn dies ist damit äquivalent, daß die $\mathfrak{n}_{\varrho_i}$ sich in der Form (1.39) ausdrücken lassen. — Für die zugehörige kovariante Basis folgt aus (1.12)

$$\begin{aligned} \nabla_\gamma \mathfrak{X}^{\circ} &= -C_{\lambda\gamma}\mathfrak{X}^{\lambda} - \cdots && - C^{\circ}_{\varrho_m\gamma}\mathfrak{R}^{\varrho_m} \\ \nabla_\gamma \mathfrak{X}^{\circ\alpha} &= -\delta^{\alpha}_{\gamma}\mathfrak{X}^{\circ} - C^{\circ\alpha}_{\varrho_1\gamma}\mathfrak{R}^{\varrho_1} - \cdots && - C^{\circ\alpha}_{\varrho_m\gamma}\mathfrak{R}^{\varrho_m} \\ \nabla_\gamma \mathfrak{R}^{\varrho_i} &= -B^{\varrho_i}_{\varrho_{i-1}\gamma}\mathfrak{R}^{\varrho_{i-1}} - C^{\varrho_i}_{\varrho_{i+1}\gamma}\mathfrak{R}^{\varrho_{i+1}} - \cdots - C^{\varrho_i}_{\varrho_m\gamma}\mathfrak{R}^{\varrho_m} && (i<m) \\ \nabla_\gamma \mathfrak{R}^{\varrho_m} &= -B^{\varrho_m}_{\varrho_{m-1}\gamma}\mathfrak{R}^{\varrho_{m-1}}. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Auf die in der üblichen Weise erfolgende Aufstellung der Integrabilitätsbedingungen verzichten wir hier.

Durch die Ableitungsgleichungen (1.40) und die zugehörigen Integrabilitätsbedingungen ist die F_p gekennzeichnet. Die in den Gleichungen auftretenden Basispunkte und Koeffizienten sind jedoch im allg. von der Auswahl der Basis abhängig, d. h. sie ändern sich bei Sterntransformationen. Für die Untersuchung der inneren Eigenschaften der F_p ist es also von fundamentaler Bedeutung, eine von diesen Transformationen unabhängige Basis zu bestimmen. Dieser Aufgabe wenden wir uns jetzt zu.

§ 2.

Das polare Basissystem.

1. Das polare Basissystem. Das gemäß (1.37) zu einer Basis $\mathfrak{B}$ gehörende System $\Gamma(\mathfrak{B})$ hängt natürlich von der Wahl von $\mathfrak{B}$ ab. Wir untersuchen diese Abhängigkeit, indem wir durch eine Sterntransformation gemäß den Formeln (1.6), (1.8) und (1.14) (mit (1.16)) zu einer neuen Basis $\mathfrak{B}^*$ übergehen und mit dieser $\Gamma^*(\mathfrak{B}^*)$ bestimmen:

$$\begin{aligned} \Gamma^{*\circ}_{\circ\gamma} &= \partial_\gamma \mathfrak{x}_\circ \circ \mathfrak{X}^{*\circ} = \partial_\gamma \mathfrak{x}_\circ \circ (\mathfrak{X}^{\circ} - a_\alpha \mathfrak{X}^{\circ\alpha} - \cdots) \\ \Gamma^{*\lambda}_{\alpha\gamma} &= (\partial_\gamma \mathfrak{x}^{*}_{\circ\alpha} - \Gamma^{*\circ}_{\circ\gamma}\mathfrak{x}^{*}_{\circ\alpha}) \circ \mathfrak{X}^{*\circ\lambda} \\ &= (\partial_\gamma(\mathfrak{x}_{\circ\alpha} + a_\alpha \mathfrak{x}_\circ) - \Gamma^{*\circ}_{\circ\gamma}(\mathfrak{x}_{\circ\alpha} + a_\alpha \mathfrak{x}_\circ)) \circ (\mathfrak{X}^{\circ\lambda} - b^{\circ\lambda}_{\varrho_1}\mathfrak{R}^{\varrho_1} - \cdots) \\ \Gamma^{*\sigma_i}_{\varrho_i\gamma} &= \partial_\gamma \mathfrak{n}^{*}_{\varrho_i} \circ \mathfrak{R}^{*\sigma_i} = \partial_\gamma(\mathfrak{n}_{\varrho_i} + b^{\tau_{i-1}}_{\varrho_i}\mathfrak{n}_{\tau_{i-1}} + \cdots) \circ (\mathfrak{R}^{\sigma_i} - b^{\sigma_i}_{\tau_{i+1}}\mathfrak{R}^{\tau_{i+1}} - \cdots). \end{aligned}$$

Hieraus folgt wegen (1.12), (1.17), (1.19) und (1.31)

$$\begin{aligned} \Gamma^{*\circ}_{\circ\gamma} &= \Gamma^{\circ}_{\circ\gamma} - a_\gamma \\ \Gamma^{*\lambda}_{\alpha\gamma} &= \Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma} - B^{\varrho_1}_{\circ\alpha\gamma}\, b^{\circ\lambda}_{\varrho_1} + 2\,\delta^{\lambda}_{(\alpha}\, a_{\gamma)} \\ \Gamma^{*\sigma_i}_{\varrho_i\gamma} &= \Gamma^{\sigma_i}_{\varrho_i\gamma} - B^{\tau_{i+1}}_{\varrho_i\gamma}\, b^{\sigma_i}_{\tau_{i+1}} + B^{\sigma_i}_{\tau_{i-1}\gamma}\, b^{\tau_{i-1}}_{\varrho_i}{}^{29}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

[29]) $B^{\sigma_i}_{\tau_{i-1}\gamma}\, b^{\tau_{i-1}}_{\varrho_i}$ bedeute für $i=1$: $B^{\sigma_1}_{\circ\lambda\gamma}\, b^{\circ\lambda}_{\varrho_1}$; $B^{\tau_{i+1}}_{\varrho_i\gamma}\, b^{\sigma_i}_{\tau_{i+1}}$ bedeute für $i=m$ die Null.

In diesen Formeln treten nur die Koeffizienten a_γ, $b_{\varrho_1}^{\circ\lambda}$, $b_{\varrho_i}^{\varrho_{i-1}}$ der Transformationen (1.6), (1.8) auf. Sobald wir diese festlegen, sind auch die Übertragungen und damit die zugehörige Basis festgelegt. Das Problem, die N_0, N_i projektivinvariant festzulegen, ist damit auf das Problem zurückgeführt, die Koeffizienten a_γ, $b_{\varrho_1}^{\circ\lambda}$, $b_{\varrho_i}^{\varrho_{i-1}}$ projektivinvariant festzulegen. Dies gelingt nun mit Hilfe der in (1.36) definierten A-Tensoren. Zuvor bemerken wir noch, daß diese in den Indizes von $\mathfrak{G}(T)$ symmetrisch sind

$$A_{\circ\alpha\beta\gamma}^{\varrho_1} = A_{\circ(\alpha\beta\gamma)}^{\varrho_1};\quad A_{\varrho_{i-1}\alpha\gamma}^{\varrho_i} = A_{\varrho_{i-1}(\alpha\gamma)}^{\varrho_i} \qquad (i>1), \tag{2.2}$$

vorausgesetzt, daß sie mit Hilfe eines zu einer Basis gehörenden Systems $\Gamma(\mathfrak{B})$ erklärt sind. Für Hyperflächen sind die $A_{\circ\alpha\beta\gamma}^{\varrho_1}$ damit gerade die Koeffizienten der kubischen Form, vgl. § 3.3. Zum Beweis von (2.2) schreiben wir die linke Seite der Ableitungsgleichungen (1.40) mit Hilfe der Übertragungen ausführlich, differenzieren nach u^α und multiplizieren mit $\mathfrak{N}^{\varrho_i}$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad \mathfrak{N}^{\varrho_1}\circ\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma\,\mathfrak{x}_\circ - B_{\circ\alpha\lambda}^{\varrho_1}\Gamma_{\gamma\beta}^{\lambda} - 2B_{\circ\alpha(\beta}^{\varrho_1}\Gamma_{\circ\gamma)}^{\circ} = \partial_\alpha B_{\circ\beta\gamma}^{\varrho_1} + B_{\circ\beta\gamma}^{\sigma_1}\Gamma_{\sigma_1\alpha}^{\varrho_1}\\
&\text{(b)}\quad \mathfrak{N}^{\varrho_i}\circ\partial_\alpha\partial_\gamma\,\mathfrak{n}_{\varrho_{i-1}} - B_{\varrho_{i-1}\gamma}^{\varrho_i}\Gamma_{\varrho_{i-1}\alpha}^{\sigma_{i-1}} = \partial_\alpha B_{\varrho_{i-1}\gamma}^{\varrho_i} + B_{\varrho_{i-1}\gamma}^{\tau_i}\Gamma_{\tau_i\alpha}^{\varrho_i} \qquad (i>1).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen wird aus (1.36)

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad A_{\circ\alpha\beta\gamma}^{\varrho_1} = \mathfrak{N}^{\varrho_1}\circ\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma\,\mathfrak{x}_\circ - 3B_{\circ\lambda(\alpha}^{\varrho_1}\Gamma_{\beta\gamma)}^{\lambda} - 3B_{\circ(\alpha\beta}^{\varrho_1}\Gamma_{\circ\gamma)}^{\circ}\\
&\text{(b)}\quad A_{\varrho_{i-1}\alpha\gamma}^{\varrho_i} = \mathfrak{N}^{\varrho_i}\circ\partial_\alpha\partial_\gamma\,\mathfrak{n}_{\varrho_{i-1}} - 2B_{\sigma_{i-1}(\alpha}^{\varrho_i}\Gamma_{\varrho_{i-1}|\gamma)}^{\sigma_{i-1}} - B_{\varrho_{i-1}\lambda}^{\varrho_i}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

und hieraus folgt (2.2).

Denken wir uns jetzt eine Basis $\mathfrak{B}$ vorgegeben, damit $\Gamma(\mathfrak{B})$ bestimmt und damit auch die A-Tensoren. Bei einer Sterntransformation ändern sich die Übertragungen gemäß (2.1) und damit auch die A-Tensoren. Wir finden mit (2.1), (2.2) aus (1.36):

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad A_{\circ\alpha\beta\gamma}^{*\varrho_1} = A_{\circ\alpha\beta\gamma}^{\varrho_1} + 3B_{\circ\lambda(\alpha}^{\varrho_1}B_{\circ\beta\gamma)}^{\sigma_1}b_{\circ\sigma_1}^{\circ\lambda} - B_{\circ\beta\gamma}^{\sigma_1}B_{\sigma_1\alpha}^{\tau_2}b_{\tau_2}^{\varrho_1} - 3B_{\circ(\alpha\beta}^{\varrho_1}a_{\gamma)}\\
&\text{(b)}\quad A_{\varrho_{i-1}\alpha\gamma}^{*\varrho_i} = A_{\varrho_{i-1}\alpha\gamma}^{\varrho_i} + 2B_{\sigma_{i-1}(\alpha}^{\varrho_i}B_{\varrho_{i-1}|\gamma)}^{\tau_i}b_{\tau_i}^{\sigma_{i-1}} - B_{\varrho_{i-1}\gamma}^{\sigma_i}B_{\sigma_i\alpha}^{\tau_{i+1}}b_{\tau_{i+1}}^{\varrho_i}\\
&\qquad\qquad - B_{\sigma_{i-1}\gamma}^{\varrho_i}B_{\tau_{i-2}\alpha}^{\sigma_{i-1}}b_{\varrho_{i-1}}^{\tau_{i-2}} + B_{\varrho_{i-1}\lambda}^{\varrho_i}B_{\circ\alpha\gamma}^{\sigma_1}b_{\sigma_1}^{\circ\lambda} - 2B_{\varrho_{i-1}(\alpha}^{\varrho_i}a_{\gamma)}\ ^{30}) \qquad (i>1).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Wir verlangen jetzt

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad A_{\sigma_1}^{*\circ\lambda} = \bar{B}_{\varrho_1}^{\circ\lambda\alpha}\bar{B}_{\sigma_1}^{\beta\gamma}A_{\circ\alpha\beta\gamma}^{*\varrho_1} = 0\\
&\text{(b)}\quad A_{\sigma_i}^{*\sigma_{i-1}} = \bar{B}_{\varrho_i}^{\sigma_{i-1}\alpha}\bar{B}_{\sigma_i}^{\varrho_{i-1}\gamma}A_{\varrho_{i-1}\alpha\gamma}^{*\varrho_i} = 0 \qquad (i>1)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

und nennen (2.6a) bzw. (2.6b) die 1-*te* bzw. *i-te Apolaritätsbedingung*.

---

30) $B_{\tau_{i-2}\alpha}^{\sigma_{i-1}}b_{\varrho_{i-1}}^{\tau_{i-2}}$ bedeute für $i=2$: $B_{\circ\lambda\alpha}^{\sigma_1}b_{\varrho_1}^{\circ\lambda}$; $B_{\sigma_i^{i+1}\alpha}^{\tau_i}b_{\tau_{i+1}}^{\varrho_i}$ bedeute für $i=m$ die Null.

Setzen wir für $A^{*\varrho_1}_{\circ\alpha\beta\gamma}$ und $A^{*\varrho_i}_{\varrho_{i-1}\alpha\gamma}$ die Ausdrücke (2.5) ein, so bedeutet (2.6) ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten $b^{\circ\lambda}_{\varrho_1}$, $b^{\varrho_{i-1}}_{\varrho_1}$, wobei die a_α als lineare Parameter auftreten. Dies System läßt sich sukzessive auflösen, indem man mit Hilfe der 1-ten Apolaritätsbedingung $b^{\circ\lambda}_{\varrho_1}$ aus allen Gleichungen eliminiert, mit Hilfe der 2-ten Apolaritätsbedingung $b^{\varrho_1}_{\varrho_2}$, usw. Dazu müssen wir voraussetzen, daß die entsprechenden Determinanten (deren Elemente sich allein aus den $B^{\varrho_1}_{\circ\alpha\beta}$, $\breve{B}^{\circ\alpha\beta}_{\varrho_1}$ und $B^{\varrho_i}_{\varrho_{i-1}\alpha}$, $\breve{B}^{\varrho_{i-1}\alpha}_{\varrho_i}$ aufbauen) nicht verschwinden. Wenn dies der Fall ist, sind die $b^{\circ\lambda}_{\varrho_1}$, $b^{\varrho_{i-1}}_{\varrho_i}$ eindeutig als lineare Funktionen der a_α festgelegt. Wir nennen diesen Fall den *regulären Fall.*

Die a_α bestimmen den N_0. Nach (2.1) ist damit durch die Apolaritätsbedingungen (2.6) im regulären Fall ein nur von N_0 abhängendes System von Übertragungen Γ^* festgelegt. Die zugehörige auch nur von N_0 abhängende Basis $\mathfrak{B}^*(\Gamma^*)$ nennen wir das *polare Basissystem. Durch die Apolaritätsbedingungen* (2.6) *ist im regulären Fall eindeutig das von einer beliebig vorgegebenen* 0-*ten Normalen abhängende polare Basissystem definiert. Man findet es, indem man von einer beliebigen Basis* $\mathfrak{B}$ *ausgeht, hiermit* $\Gamma(\mathfrak{B})$ *und hiermit wieder die A-Tensoren bestimmt. Durch die Apolaritätsbedingungen werden dann im regulären Fall die Koeffizienten* $b^{\circ\lambda}_{\varrho_i}$, $b^{\varrho_{i-1}}_{\varrho_i}$ *als lineare Funktionen der* a_α, *die* N_0 *kennzeichnen, festgelegt. Hiermit sind nach* (2.1) *neue Übertragungen bestimmt. Die gemäß* (1.39) *bestimmte zugehörige Basis ist dann das nur von* N_0 *abhängende polare Basissystem. Damit ist das Einspannungsproblem auf die Festlegung von* N_0 *zurückgeführt.*

Wir verzichten hier auf die formale Durchführung der Auflösung des Gleichungssystems (2.6) und damit auf die explizite Darstellung des polaren Basissystems. Wir müssen aber auch offen lassen, wann die Forderung der Regularität erfüllt ist[31]), vgl. jedoch § 3. Wir bemerken nur noch, daß das polare Basissystem von den Ableitungen bis zur $(2m+1)$-ten Ordnung von $\mathfrak{x}_0$ abhängt. Denn der Tensor $B^{\varrho_m}_{\varrho_{m-1}\alpha}$ wird unter Verwendung $(m+1)$-ter Ableitungen gebildet, der A-Tensor $A^{\varrho_m}_{\varrho_{m-1}\alpha\gamma}$ hängt damit auch noch von $(m+2)$-ten Ableitungen ab und bei der Bildung der $\mathfrak{n}_{\varrho_i}$ gemäß (1.39) kommen ab $\mathfrak{n}_{\varrho_2}$ insgesamt $(m-1)$ neue Ableitungen hinzu; q. e. d.

2. Über die Festlegung von N_0. Wir versuchen, N_0 durch die 0-*te Apolaritätsbedingung* (unter Verwendung von (2.5a))

$$(2.7)\quad \breve{B}^{\circ\beta\gamma}_{\varrho_1} A^{*\varrho_1}_{\circ\alpha\beta\gamma} = \breve{B}^{\circ\beta\gamma}_{\varrho_1} A^{\varrho_1}_{\circ\alpha\beta\gamma} - p\, b^{\varrho_1}_{\tau_2} B^{\tau_2}_{\varrho_1\alpha} + (p+2r_1) B^{\varrho_1}_{\circ\lambda\alpha} b^{\circ\lambda}_{\varrho_1} - r_1(p+2)\, a_\alpha = 0$$

---

[31]) Da die Koeffizienten der $b^{\circ\lambda}_{\varrho_1}$ und $b^{\varrho_{i-1}}_{\varrho_i}$ sich nur aus den B-Tensoren und ihren Komplementären zusammensetzen, erscheint es nicht ausgeschlossen, daß aus der Existenz dieser Tensoren allein schon immer die Regularität folgt. Für $m=1$ vgl. [42]).

festzulegen[32]). Man kann (2.7) immer nach a_α auflösen, d. h. die 0-te Apolaritätsbedingung bestimmt zu gegebenem N_1 und N_2 eindeutig einen N_0 [33]). Ferner gilt: *Falls die 0-te Apolaritätsbedingung (als lineare Gleichung in* a_α, $b^{\lambda}_{\varrho_1}$, $b^{\varrho_i - 1}_{\varrho_i}$) *unabhängig von den anderen Apolaritätsbedingungen* (2.6) *ist, legt sie im regulären Fall für das polare Basissystem* a_α *und damit* N_0 *fest. In diesem Fall gibt es also ein eindeutig bestimmtes ausgezeichnetes polares Basissystem.*

Wann diese Unabhängigkeitsvoraussetzung erfüllt ist, muß offen bleiben. Für Kurven F_1 und Hyperflächen F_{n-1} ist sie nicht erfüllt, da in diesen Fällen die 0-te Apolaritätsbedingung mit der 1-ten identisch wird, vgl. § 3. In den anderen Fällen kann man die Unabhängigkeit erwarten, vgl. § 3, S. 341 ff. Wir halten diese Frage aber für von untergeordneter Bedeutung, seit G. Bol für Kurven und Hyperflächen gezeigt hat, daß man für geometrische Untersuchungen zweckmäßigerweise N_0 nicht von vornherein festlegt, sondern von Fall zu Fall den geometrischen Erfordernissen anpaßt[34]).

3. Die affine Differentialgeometrie. Wir beschränken die projektiven Transformationen des P_n auf solche, die eine $(n-1)$-dimensionale Hyperebene E^{∞}_{n-1} festlassen. Aus P_n wird damit der *n-dimensionale affine Raum* E_n. Wir wählen die Basis in E_n so, daß die ersten n Basispunkte in E^{∞}_{n-1} liegen. Wir können die nicht in E^{∞}_{n-1} gelegenen Punkte $\mathfrak{x}_\circ$ so normieren, daß $\mathfrak{x}_\circ \circ \mathfrak{A} = 1$ wird, wenn $\mathfrak{A}$ der zu E^{∞}_{n-1} gehörige kovariante Punkt ist. Diese „affinen Punkte" werden dann durch die n ersten Koordinaten bestimmt — die $(n+1)$-te hat den Wert 1. Die kontravarianten Punkte von E^{∞}_{n-1} nennen wir *kontravariante Vektoren*, die $(n-2)$-dimensionalen linearen Räume in E^{∞}_{n-1} nennen wir *kovariante Vektoren*. Die Vektoren (die durch n Zahlen bestimmt sind) sind also dadurch gekennzeichnet, daß sie sich bei den homogenen Affinitäten (das sind die Transformationen von E^{∞}_{n-1} in sich) wie Punkte eines $(n-1)$-dimensionalen projektiven Raumes transformieren, während sie bei den Schiebungen (das sind die Transformationen des nicht in E^{∞}_{n-1} gelegenen Basispunktes von E_n) invariant sind[35]).

Betrachten wir jetzt eine F_p im E_n. Wir denken uns also $\mathfrak{x}_\circ(u^\alpha)$ durch $\mathfrak{x}_\circ(u^\alpha) \circ \mathfrak{A} = 1$ normiert. Indem wir diese ausgezeichnete Normierung festhalten, brauchen wir den Einfluß von $\mathfrak{G}(U)$ nicht mehr

[32]) Andere Möglichkeiten zur Festlegung von N_0 werden durch die Bedingungen $\tilde{B}^{\varrho_i - 1\,\gamma}_{\varrho_i}\, A^{*\varrho_i}_{\varrho_{i-1}\alpha\gamma} = 0$ gegeben.

[33]) $A^{*\varrho_i}_{\circ\alpha\beta\gamma}$ hängt gemäß (2.5a) außer von N_0 nur von N_1 und N_2 ab.

[34]) Neben den Arbeiten [3]) und [4]) vgl. auch G. Bol, Projektive Differentialgeometrie, Bd. 1, Göttingen 1950, Bd. 2 in Vorbereitung.

[35]) Im allgemeinen pflegt man sich durch die Vektoren, deren Koordinaten sich um einen Faktor unterscheiden, verschiedene Vektoren repräsentiert zu denken. Bei dieser Auffassung repräsentieren also unsere Punkte und $(n-2)$-Ebenen in E^{∞}_{n-1} die Klassen der sich um einen Skalar unterscheidenden Vektoren.

zu berücksichtigen, und wir wollen daher den Index $\circ$ fortlassen. Außerdem legen wir in den Transformationen (1.6), (1.8) a_α und $b_{\varrho_i}^\circ$ durch $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{x}_\alpha = 0$ und $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{n}_{\varrho_i} = 0$ fest, d. h. wir wählen als Basispunkte für N_0, N_i kontravariante Vektoren. Der kovariante Punkt $\mathfrak{X}^\circ$ aus (1.12) ist dann mit $\mathfrak{A}$ identisch, und es wird $\Gamma_{\circ\alpha}^\circ = \partial_\alpha \mathfrak{x}_\circ \circ \mathfrak{A} = 0$. *Die vorstehenden Überlegungen für die projektive Differentialgeometrie lassen sich also auf die affine Differentialgeometrie übertragen, indem man* $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^\alpha)$ *als affinen „Ortsvektor“* [36]) *auffaßt, die Überlegungen bezüglich* $\mathfrak{G}(U)$ *fortläßt und damit* $\Gamma_{\circ\alpha}^\circ = 0$ *setzt. Ein affin-ausgezeichneter* N_0 *wird durch die kontravarianten Vektoren* $\partial_\alpha \mathfrak{x}$ *aufgespannt: es ist der Schnitt des Tangentialraumes mit* E_{n-1}^∞. *Auch die* N_i *wähle man in* E_{n-1}^∞, *d. h. die Basispunkte* $\mathfrak{n}_{\varrho_i}$ *als Vektoren. Bei den Sterntransformationen* (1.6) *und* (1.8) *ist damit* $a_\alpha = b_{\varrho_i}^\circ = 0$ *zu setzen.*

Indem wir zu unserem affin-ausgezeichneten N_0 das polare Basissystem bestimmen, haben wir das Einspannungsproblem für die Affingeometrie gelöst: *Die Apolaritätsbedingungen* (2.6) *bestimmen im regulären Fall eindeutig ein affininvariantes Basissystem. Man erhält es ebenso, wie wir es oben im projektiven Fall ausgeführt haben, wobei nur die dortigen Überlegungen jetzt im affinen Sinn zu interpretieren sind.* Insbesondere müssen wir $a_\alpha = 0$ setzen, da wir ja N_0 festhalten.

Durch die gleichen Methoden wird auch das Einspannungsproblem für den n-dimensionalen linear-zusammenhängenden Raum L_n *gelöst.* Man hat jetzt nur die durch ∂_α angezeigte partielle Ableitung, wenn sie auf eine Größe des L_n angewandt wird, als kovariante Ableitung bezüglich des in L_n erklärten linearen Zusammenhangs zu interpretieren. Die B-Tensoren und A-Tensoren sind jetzt zwar nicht mehr notwendig symmetrisch, aber es genügt, ihren symmetrischen Teil zu nehmen. Dann überträgt sich alles wortwörtlich. Insbesondere gilt dies für den Raum A_n mit affinem Zusammenhang, vgl. J. A. Schouten [7]).

§ 3.

Spezialisierung auf die Fälle $m = n-1$ und $m = 1$.

1. Spezialisierung auf Kurven ($m = n-1$). Wir betrachten jetzt wieder den P_n und wollen nachsehen, wie das polare Basissystem im Spezialfall der Kurven F_1 aussieht. Für die Dimension der N_0, N_i gilt $p-1 = r_i - 1 = 0$ und damit wird $m = n-1$. Die F_1 beschreiben wir durch $\mathfrak{x}_\circ = \mathfrak{x}_\circ(t)$. Für die Indizes α und ϱ_i schreiben wir die Indizes 0 und i. Als Ausgangsbasis wählen wir, indem wir die k-te Ableitung nach t mit ∂_0^k bezeichnen,

$$\mathfrak{x}_\circ,\ \mathfrak{x}_{\circ 0} = \partial_0 \mathfrak{x}_\circ;\ \mathfrak{n}_i = \partial_0^{i+1} \mathfrak{x}_\circ. \tag{3.1}$$

[36]) Der „Ortsvektor“ ist kein Vektor in unserm Sinne.

Damit diese Punkte den P_n aufspannnen, müssen wir

$$\mathcal{A} \equiv [\mathfrak{x}_0, \partial_0 \mathfrak{x}_0, \ldots, \partial_0^n \mathfrak{x}_0] \neq 0 \tag{3.2}$$

voraussetzen. Die zugehörige kovariante Basis ist durch

$$\begin{aligned} &\mathfrak{X}^0 \circ \mathfrak{v} = \mathcal{A}^{-1} [\mathfrak{v}, \partial_0 \mathfrak{x}_0, \ldots, \partial_0^n \mathfrak{x}_0]; \quad \mathfrak{X}^{00} \circ \mathfrak{v} = \mathcal{A}^{-1} [\mathfrak{x}_0, \mathfrak{v}, \ldots, \partial_0^n \mathfrak{x}_0] \\ &\mathfrak{X}^{0i} \circ \mathfrak{v} = \mathcal{A}^{-1} [\mathfrak{x}_0, \ldots, \partial_0^i \mathfrak{x}_0, \mathfrak{v}, \partial_0^{i+2} \mathfrak{x}_0, \ldots, \partial_0^n \mathfrak{x}_0] \end{aligned} \tag{3.3}$$

(mit unbestimmtem $\mathfrak{v}$) gegeben. Damit wird aus (1.31) und (1.37)

$$B^1_{000} = B^i_{i-1\,0} = 1 \qquad (i > 1) \tag{3.4}$$

$$\Gamma^0_{00} = \Gamma^0_{00} = \Gamma^i_{i0} = 0 \quad (i < m); \quad \Gamma^m_{m0} = \partial_0 \mathfrak{n}_m \circ \mathfrak{N}^m = \partial_0 \lg \mathcal{A}. \tag{3.5}$$

Hiermit werden die A-Tensoren gemäß (1.36):

$$A^1_{0000} = A^i_{i-1\,00} = 0 \ (1 < i < m); \quad A^m_{m-1\,00} = \Gamma^m_{m0} = \partial_0 \lg \mathcal{A}. \tag{3.6}$$

Die Apolaritätsbedingungen (2.6) erhalten wir für F_1 einfach durch das Nullsetzen der Gleichungen (2.5):

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad -b^1_2 + 3 b^{00}_1 - 3 a_0 = 0 \\ &\text{(b)} \quad -b^i_{i+1} + 2 b^{i-1}_i - b^{i-2}_{i-1} + b^{00}_1 - 2 a_0 = 0^{37}) \qquad (1 < i < m) \\ &\text{(c)} \quad \partial_0 \lg \mathcal{A} + 2 b^{m-1}_m - b^{m-2}_{m-1} + b^{00}_1 - 2 a_0 = 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Aus (3.6a, b) folgt durch zweimaliges Aufsummieren

$$b^i_{i+1} = \frac{(i+1)(i+2)}{2} b^{00}_1 - i(i+2) a_0. \tag{3.7}$$

Setzen wir dies in (3.6c) ein, so folgt

$$b^{00}_1 = -\partial_0 \lg \bar{\mathcal{A}} + \frac{2m}{m+1} a_0; \quad \bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^{\frac{2}{(m+1)(m+2)}}. \tag{3.8}$$

Die neuen Übertragungen werden damit gemäß (2.1)

$$\begin{aligned} &\Gamma^{*0}_{00} = -a_0; \quad \Gamma^{*0}_{00} = \partial_0 \lg \bar{\mathcal{A}} + \frac{2}{m+1} a_0 \\ &\Gamma^{*i}_{i0} = (i+1) \left(\partial_0 \lg \bar{\mathcal{A}} + \frac{2}{m+1} a_0 \right) - a_0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Hiermit können wir nach (1.39) das von N_0 abhängige polare Basissystem bestimmen. Zuvor bemerken wir aber, daß wir mit Hilfe der durch

$$\bar{\Gamma}^{*0}_{00} = \Gamma^{*0}_{00} + \partial_0 \lg \sigma = -a_0 + \partial_0 \lg \sigma = 0 \tag{3.10}$$

bis auf einen konstanten Faktor festgelegten Normierung die Übertragung für $\mathfrak{G}(U)$ zu Null machen können: *Die N_0 und die bis auf einen* (unwesentlichen, da nur eine Projektivität bedeutenden) *konstanten Faktor festgelegten Normierungen entsprechen sich damit eineindeutig.*

[37]) b^{i-2}_{i-1} ist für $i = 2$ mit b^{00}_1 zu identifizieren.

Denken wir uns diese Normierung durchgeführt, also $a_0 = 0$ gesetzt. Dann ist das polare Basissystem durch

$$\text{(3.11)} \qquad \mathfrak{x}_{\circ 0} = \partial_0 \mathfrak{x}_\circ; \quad \mathfrak{n}_1 = \partial_0 \mathfrak{x}_{\circ 0} - \mathfrak{x}_{\circ 0} \partial_0 \lg \bar{\mathcal{A}}; \quad \mathfrak{n}_i = \partial_0 \mathfrak{n}_{i-1} - i\, \mathfrak{n}_{i-1} \partial_0 \lg \bar{\mathcal{A}} \qquad (i > 1)$$

gegeben. Wir erkennen, daß die kovariante Ableitung in (3.11) gerade der Ableitung nach der durch $\frac{dt^*}{dt} = \bar{\mathcal{A}}$ definierten *Affinbogenlänge* entspricht. *Man erhält ein polares Basissystem einer F_1, indem man bei einer beliebigen festgehaltenen Normierung von $\mathfrak{x}_\circ$ als Basispunkte die Ableitungen von $\mathfrak{x}_\circ$ nach der zugehörigen Affinbogenlänge wählt. Die Mannigfaltigkeit der polaren Basissysteme einer F_1 hängt damit von einer Funktion einer Veränderlichen ab*[38]. — Hieraus folgt insbesondere: *Für die Affingeometrie besteht das polare Basissystem einer F_1 aus den Ableitungen von $\mathfrak{x}_\circ$ nach der Affinbogenlänge.*

Die Ableitungsgleichungen haben die einfache Form

$$\text{(3.12)} \qquad \begin{gathered} \nabla_0 \mathfrak{x}_\circ = \mathfrak{x}_{\circ\alpha}; \quad \nabla_0 \mathfrak{x}_{\circ 0} = \mathfrak{n}_1; \quad \nabla_0 \mathfrak{n}_i = \mathfrak{n}_{i+1} \\ \nabla_0 \mathfrak{n}_m = C^{m-1}_{m\,0}\, \mathfrak{n}_{m-1} + \cdots + C^{\circ 0}_{m\,0}\, \mathfrak{x}_{\circ 0} + C^{\circ}_{m\,0}\, \mathfrak{x}_\circ. \end{gathered} \qquad (1 < i < m)$$

[38]) Diese Überlegungen stehen in engem Zusammenhang mit der von G. Bol (vgl. [4]) und [34])) angewandten Methode der „halbinvarianten Differentiation" bei Kurven. G. Bol wählt σ so, daß

$$\text{(*)} \qquad \bar{\mathcal{A}}(\sigma \mathfrak{x}) = \sigma^{\frac{2}{n}}\, \bar{\mathcal{A}}(\mathfrak{x}) = \text{const.}$$

wird, m. a. W. wählt er die Normierung so, daß der vorhandene Parameter gerade ein Affinbogenlängenparameter wird. Damit die Eigenschaft (*) bei Parametertransformationen $t^* = t^*(t)$ erhalten bleibt, muß bei einer solchen Transformation gleichzeitig eine Umnormierung stattfinden. Auf diese Weise sind $\mathfrak{G}(T)$ und $\mathfrak{G}(U)$ durch die Beziehung

$$\text{(**)} \qquad \sigma^{\frac{2}{n}} \varphi = 1 \qquad \left(\varphi = \frac{dt^*}{dt}\right),$$

die sich aus dem Transformationsverhalten von $\bar{\mathcal{A}}$ bei $\mathfrak{G}(T)$ und $\mathfrak{G}(U)$ ergibt, miteinander gekoppelt. Damit gehört nach (3.10) und (**) zu jeder Übertragung $\Gamma^{\circ}_{\circ 0}$ oder auch zu jedem N_0 ein bis auf eine ganze lineare („affine") Transformation festgelegter Parameter:

$$\text{(***)} \qquad \partial_0 \lg \varphi = -\frac{2}{n}\, \partial_0 \lg \sigma = \frac{2}{n}\, \Gamma^{\circ}_{\circ 0}.$$

Man sagt, daß eine Größe bei den gemäß (**) kombinierten Transformationen das Gewicht g hat, wenn sie sich dabei mit $\varphi^g = \sigma^{-\frac{2}{n} g}$ multipliziert. Insbesondere hat also $\mathfrak{x}_\circ$ das Gewicht $-\frac{n}{2}$, und einem kontravarianten Index von $\mathfrak{G}(U)$ entspricht das Gewicht $+\frac{n}{2}$. Die „halbinvariante Differentiation" entspricht damit unserer kovarianten Ableitung bezüglich $\mathfrak{G}(U)$ mit der Übertragung $-\frac{n}{2}\, \Gamma^{\circ}_{\circ 0}$.

Fragen wir nach einer Festlegung von N_0, so versagt die 0-te Apolaritätsbedingung (2.7), da sie für F_1 mit der 1-ten äquivalent ist. Man kann aber z. B. fordern, daß in (3.12) $\nabla_0 \mathfrak{n}_m \circ \mathfrak{R}^{m-1} = C^{m-}_{m\ 0} = 0$ gelten soll. Dies führt auf eine Riccatische Differentialgleichung für $\Gamma^\circ_{\circ 0}$ bzw. (mit Formel (***) in [38])) für $\lg \frac{dt^*}{dt}$ [39]). Wir verzichten auf die Herleitung dieser bekannten Differentialgleichung in unserer Schreibweise und bemerken nur, daß durch sie der Parameter t bis auf gebrochene lineare Substitutionen festgelegt wird. Man nennt ihn daher auch den „projektiven" Parameter der F_1. N_0 ist ersichtlich hiermit bis auf einen von t unabhängigen Parameter festgelegt.

2. Der Fall $m = 1$. Wir betrachten jetzt den Fall, daß bereits der 2-te Schmiegraum S_2 den P_n aufspannt. Da S_2 höchstens die Dimension $p + \binom{p+1}{2}$ hat, gilt für p die Beschränkung $p + \binom{p+1}{2} \geqq n$. Insbesondere gehören hierzu die Hyperflächen F_{n-1}. Den Index i, der jetzt nur den Wert 1 annimmt, lassen wir fort. ϱ, σ, τ durchlaufen also die Werte $1, \ldots, r = n-p$. — Die Sterntransformationen (1.6), (1.8) einer Basis $\mathfrak{x}_\circ$, $\mathfrak{x}_{\circ\alpha}$, $\mathfrak{n}_\varrho$ lauten jetzt

$$\mathfrak{x}^*_{\circ\alpha} = \mathfrak{x}_{\circ\alpha} + a_\alpha \mathfrak{x}_\circ; \quad \mathfrak{n}^*_\varrho = \mathfrak{n}_\varrho + b^\circ_\varrho{}^\lambda \mathfrak{x}_{\circ\lambda} + b^\circ_\varrho \mathfrak{x}_\circ. \tag{3.13}$$

Von den B-Tensoren (1.17) bleiben nur die $B^\varrho_{\circ\alpha\beta}$ übrig und von (1.20):

$$B^\varrho_{\circ\alpha\beta} \breve{B}^{\circ\alpha\beta}_\sigma = p\,\delta^\varrho_\sigma; \quad B^\varrho_{\circ\alpha\gamma} \breve{B}^{\circ\beta\gamma}_\varrho = r\,\delta^\beta_\alpha{}^{40}). \tag{3.14}$$

Die Elemente $B^{\varrho_i}_{\varrho_{i-1}\alpha}$ treten gar nicht auf. (1.39) lautet jetzt

$$\mathfrak{x}_{\circ\alpha} = \partial_\alpha \mathfrak{x}_\circ - \Gamma^\circ_{\circ\alpha} \mathfrak{x}_\circ; \quad \mathfrak{n}_\varrho = \frac{1}{p} \breve{B}^{\circ\alpha\beta}_\varrho (\partial_\alpha \mathfrak{x}_{\circ\beta} - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \mathfrak{x}_{\circ\lambda} - \Gamma^\circ_{\circ\alpha} \mathfrak{x}_{\circ\beta}), \tag{3.15}$$

und die Ableitungsgleichungen (1.40) reduzieren sich auf

$$\begin{gathered} \nabla_\alpha \mathfrak{x}_\circ = \mathfrak{x}_{\circ\alpha}; \quad \nabla_\alpha \mathfrak{x}_{\circ\beta} = B^\varrho_{\circ\alpha\beta} \mathfrak{n}_\varrho + C_{\alpha\beta} \mathfrak{x}_\circ \\ \nabla_\alpha \mathfrak{n}_\varrho = C^{\circ\ \lambda}_{\varrho\alpha} \mathfrak{x}_{\circ\lambda} + C^\circ_{\varrho\alpha} \mathfrak{x}_\circ. \end{gathered} \tag{3.16}$$

Die Gleichungen (2.3a) schreiben wir in der Form

$$B^\varrho_{\circ\lambda\alpha} \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} = \mathfrak{R}^\varrho_\circ \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma \mathfrak{x}_\circ - \partial_\alpha B^\varrho_{\circ\beta\gamma} - B^\sigma_{\circ\beta\gamma} \Gamma^\varrho_{\sigma\alpha} - 2 B^\varrho_{\circ\alpha(\beta} \Gamma^\circ_{\circ\gamma)}. \tag{3.17}$$

Hiermit eliminieren wir die $\Gamma^\lambda_{\beta\gamma}$ aus (2.4a) und finden

$$A^\varrho_{\circ\alpha\beta\gamma} = -2\,\mathfrak{R}^\varrho_\circ \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma \mathfrak{x}_\circ + 3\,\partial_{(\alpha} B^\varrho_{\circ\beta\gamma)} + 3\,B^\sigma_{\circ(\alpha\beta} \Gamma^\varrho_{|\sigma|\gamma)} + 3\,B^\varrho_{\circ(\alpha\beta} \Gamma^\circ_{\circ\gamma)}. \tag{3.18}$$

[39]) Vgl. G. Bol [4]), S. 9–10.

[40]) Für die entsprechenden Überlegungen im affinen Fall vgl. W. Klingenberg [6]) S. 67 f. Es besteht der schon in [17]) erwähnte Unterschied bei der Definition der komplementären B-Tensoren. Wir könnten jetzt im Fall $m = 1$ statt unserer für beliebiges i gültigen Definition (1.21) bis (1.28) auch die Definition jener Arbeit zugrunde legen. Die Äquivalenz der beiden Definitionen erscheint fraglich. Für den Fall der F_2 im P_4 besteht sie allerdings.

Eliminieren wir hiermit $\mathfrak{R}^{\varrho}_{\circ} \circ \partial_{\alpha}\partial_{\beta}\partial_{\gamma}\mathfrak{x}_{\circ}$ aus (3.17), so wird

$$
\begin{aligned}
(3.19)\qquad & B^{\varrho}_{\circ\,\lambda\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma} = \tfrac{1}{2}\,(\partial_{\beta}B^{\varrho}_{\circ\,\gamma\alpha} + \partial_{\gamma}B^{\varrho}_{\circ\beta\alpha} - \partial_{\alpha}B^{\varrho}_{\circ\beta\gamma}) - \tfrac{1}{2}\,A^{\varrho}_{\circ\,\alpha\beta\gamma} \\
& + \tfrac{1}{2}\,(B^{\sigma}_{\circ\,\alpha\beta}\Gamma^{\varrho}_{\sigma\gamma} + B^{\sigma}_{\circ\,\alpha\gamma}\Gamma^{\varrho}_{\sigma\beta} - B^{\sigma}_{\beta\gamma}\Gamma^{\varrho}_{\sigma\alpha}) - \tfrac{1}{2}\,(B^{\varrho}_{\circ\,\alpha\beta}\Gamma^{\circ}_{\circ\,\gamma} + B^{\varrho}_{\circ\,\alpha\gamma}\Gamma^{\circ}_{\circ\beta} - B^{\varrho}_{\circ\beta\gamma}\Gamma^{\circ}_{\circ\alpha}).
\end{aligned}
$$

Bei einer Sterntransformation (3.13) gilt für ein System Γ gemäß (2.1)

$$
\begin{aligned}
(3.20)\qquad & \Gamma^{*\circ}_{\circ\,\alpha} = \Gamma^{\circ}_{\circ\,\alpha} - a_{\alpha}; \quad \Gamma^{*\lambda}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma} - b^{\circ\lambda}_{\varrho}B^{\varrho}_{\circ\beta\gamma} + 2\,\delta^{\lambda}_{(\beta}a_{\gamma)}; \\
& \Gamma^{*\varrho}_{\sigma\alpha} = \Gamma^{\varrho}_{\sigma\alpha} + B^{\varrho}_{\circ\,\lambda\alpha}\,b^{\lambda}_{\sigma\circ}.
\end{aligned}
$$

Von den Apolaritätsbedingungen (2.6) bleibt nur die 1-te übrig:

$$
(3.21)\qquad A^{*}_{\sigma\circ\,\lambda}\breve{B}^{\circ\,\lambda\alpha}_{\varrho}\breve{B}^{\circ\,\beta\gamma}_{\sigma}A^{*\,\varrho}_{\circ\,\alpha\beta\gamma} = 0.
$$

Setzen wir in (3.18) für die $\Gamma^{\varrho}_{\sigma\gamma}, \Gamma^{\circ}_{\circ\gamma}$ die $\Gamma^{*\varrho}_{\sigma\gamma}, \Gamma^{*\circ}_{\circ\gamma}$ aus (3.20) ein, so erhalten wir $A^{*\,\varrho}_{\circ\,\alpha\beta\gamma}$[41]). Aus (3.21) wird damit

$$
(3.22)\qquad \breve{B}^{\circ\,\lambda\alpha}_{\varrho}\breve{B}^{\circ\,\beta\gamma}_{\sigma}A^{\varrho}_{\circ\,\alpha\beta\gamma} + b^{\circ\lambda'}_{\sigma'}E^{\sigma'\,\lambda}_{\lambda'\,\sigma} - (2r+p)a_{\gamma}\breve{B}^{\circ\,\lambda\gamma}_{\sigma} = 0
$$

mit

$$
(3.23)\qquad E^{\sigma'\,\lambda}_{\lambda'\,\sigma} = r\,p\,\delta^{\lambda}_{\lambda'}\delta^{\sigma'}_{\sigma} + 2\breve{B}^{\circ\,\lambda\alpha}_{\varrho}\breve{B}^{\circ\,\beta\gamma}_{\sigma}B^{\delta'}_{\circ\,\alpha\beta}B^{\varrho}_{\circ\,\lambda'\gamma}.
$$

Wir fassen $E^{\sigma'\,\lambda}_{\lambda'\,\sigma}$ als quadratische Matrix von rp Zeilen auf. Die Forderung der Regularität besteht jetzt in $E = \mathrm{Det}\,(E^{\sigma'\,\lambda}_{\lambda'\,\sigma}) \neq 0$[42]). Es gibt dann komplementäre Elemente $\breve{E}^{\sigma'\,\lambda}_{\lambda'\,\sigma}$ mit der Eigenschaft

$$
(3.24)\qquad E^{\sigma'\,\lambda}_{\lambda'\,\sigma}\breve{E}^{\sigma\,\lambda''}_{\lambda\,\sigma''} = \delta^{\lambda''}_{\lambda'}\delta^{\sigma'}_{\sigma''}.
$$

Wir können damit (3.22) nach den $b^{\lambda}_{\sigma\circ}$ auflösen:

$$
(3.25)\qquad b^{\lambda}_{\sigma\circ} = -\breve{E}^{\sigma'\,\lambda}_{\lambda'\,\sigma}\breve{B}^{\circ\,\lambda'\alpha}_{\varrho'}\breve{B}^{\circ\,\beta\gamma}_{\sigma'}A^{\varrho'}_{\circ\,\alpha\beta\gamma} + (2r+p)\breve{B}^{\circ\,\lambda'\gamma}_{\sigma'}\breve{E}^{\sigma'\,\lambda}_{\lambda'\,\sigma}a_{\gamma}.
$$

Hiermit sind die Übertragungen (3.20) und damit durch (3.15) das nur von N_0 abhängende polare Basissystem festgelegt. — Wir wollen noch eine explizite Formel für $\Gamma^{*\,\lambda}_{\beta\gamma}$ angeben. Aus (3.17) finden wir mit (3.20) für $\Gamma^{*\,\lambda}_{\beta\gamma}$:

$$
\begin{aligned}
(3.26)\qquad & r\,\Gamma^{*\,\lambda}_{\beta\gamma} = \breve{B}^{\circ\,\lambda\alpha}_{\varrho}(\mathfrak{R}^{\varrho}_{\circ} \circ \partial_{\alpha}\partial_{\beta}\partial_{\gamma}\mathfrak{x}_{\circ} - \partial_{\alpha}B^{\varrho}_{\circ\beta\gamma}) \\
& - B^{\sigma}_{\circ\beta\gamma}\breve{B}^{\circ\,\lambda\alpha}_{\varrho}\Gamma^{\varrho}_{\sigma\alpha} - r\,B^{\sigma}_{\circ\beta\gamma}b^{\lambda}_{\sigma\circ} - 2\,r\,\delta^{\lambda}_{(\beta}\Gamma^{*\circ}_{\circ\gamma)}.
\end{aligned}
$$

Für $b^{\circ\lambda}_{\sigma}$ setzen wir den Ausdruck (3.25) ein. Dabei drücken wir die $A^{\varrho}_{\circ\,\alpha\beta\gamma}$ hierin durch (2.4a) aus, wobei für die $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ in (2.4a) der Ausdruck (3.26) ohne Stern (d. h. (3.26) mit $b^{\circ\lambda}_{\varrho} = a_{\alpha} = 0$) einzusetzen

---

[41]) Die anderen Terme in (3.18) ändern sich für $m = 1$ bei einer Sterntransformation nicht.

[42]) Vgl. die entsprechenden Überlegungen bei K. H. Weise [6]) II, S. 170. (Die dortigen Elemente $E^{\sigma'\,\sigma}_{\lambda'\,\sigma}$ unterscheiden sich von unseren um den Faktor rp). Über das Nichtverschwinden von E vgl. ebenda S. 179—180.

ist. Wir finden damit [43])

$$\Gamma^{*\lambda}_{\beta\gamma} = Z^{\lambda}_{\beta\gamma} - 2\,\delta^{\lambda}_{(\beta}\,\Gamma^{*}_{\gamma)} + (p+2r)\,B^{\sigma}_{\beta\gamma}\,\breve{B}^{\lambda'\mu}_{\sigma}\,\breve{E}^{\sigma'\lambda}_{\lambda'\sigma}\,\Gamma^{*}_{\mu} \tag{3.27}$$

mit

$$Z^{\lambda}_{\beta\gamma} = \frac{1}{r}\,\breve{B}^{\lambda\alpha}_{\varrho}\,(\mathfrak{R}^{\varrho}\,\partial_{\alpha}\,\partial_{\beta}\,\partial_{\gamma}\,\mathfrak{x} - \partial_{\alpha}\,B^{\varrho}_{\beta\gamma}) + B^{\sigma}_{\beta\gamma}\,\breve{E}^{\sigma'\lambda}_{\lambda'\sigma}\,\breve{B}^{\lambda'\alpha}_{\varrho}\,\breve{B}^{\beta\gamma}_{\sigma'}\,\omega^{\varrho}_{\alpha\beta\gamma}, \tag{3.28a}$$

worin

$$\omega^{\varrho}_{\alpha\beta\gamma} = \mathfrak{R}^{\varrho}\,\partial_{\alpha}\,\partial_{\beta}\,\partial_{\gamma}\,\mathfrak{x} - \frac{3}{r}\,B^{\varrho}_{\mu(\alpha}\,\breve{B}^{\mu\lambda}_{\tau}\,(\mathfrak{R}^{\tau}\,\partial_{|\lambda|}\,\partial_{\beta}\,\partial_{\gamma)}\,\mathfrak{x} - \partial_{|\lambda|}\,B^{\tau}_{\beta\gamma)}) \tag{3.28b}$$

ist. *Für $E \neq 0$ bestimmt sich mit* (3.27), (3.28) *aus* (3.15) *explizit das nur von einem* (durch die a_α in Γ^{*}_{α} beschriebenen) N_0 *abhängende polare Basissystem.*

Nach § 2.3 gelangen wir zu den Formeln der affinen Flächentheorie, wenn wir $\Gamma^{\sigma}_{\alpha} = a_\alpha = 0$ setzen. Nun hat K. H. Weise [6]) für die Affingeometrie den Fall $m = 1$ behandelt und einen Affinnormalenraum angegeben, der gerade mit Hilfe der Übertragungen $\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma} = Z^{\lambda}_{\beta\gamma}$ gebildet wird, d. h. *für die Affingeometrie führt das polare Basissystem im Fall $m = 1$ auf den Weiseschen Affinnormalenraum.*

Zur Festlegung von N_0 ziehen wir die 0-te Apolaritätsbedingung (2.7) heran, in der wir $b^{\varrho_1}_{\tau_2} = 0$ setzen können, da es ja keinen N_2 gibt:

$$\breve{B}^{\beta\gamma}_{\varrho}\,A^{*\varrho}_{\alpha\beta\gamma} = \breve{B}^{\beta\gamma}_{\varrho}\,A^{\varrho}_{\alpha\beta\gamma} + (p+2r)\,B^{\sigma}_{\alpha\lambda}\,b^{\lambda}_{\sigma} - r\,(p+2)\,a_\alpha = 0. \tag{3.29}$$

Eliminieren wir hiermit a_α aus (3.22), so finden wir

$$b^{\lambda'}_{\sigma'}\,H^{\sigma'\lambda}_{\lambda'\sigma} + \breve{B}^{\lambda\alpha}_{\varrho}\,\breve{B}^{\beta\gamma}_{\sigma}\,A^{\varrho}_{\alpha\beta\gamma} - \frac{2r+p}{r(p+2)}\,\breve{B}^{\beta\gamma}_{\varrho}\,\breve{B}^{\lambda\alpha}_{\sigma}\,A^{\varrho}_{\alpha\beta\gamma} = 0 \tag{3.30}$$

mit

$$H^{\sigma'\lambda}_{\lambda'\sigma} = E^{\sigma'\lambda}_{\lambda'\sigma} - \frac{(2r+p)^2}{r(p+2)}\,\breve{B}^{\lambda\gamma}_{\sigma}\,B^{\sigma'}_{\lambda'\gamma}. \tag{3.31}$$

Wenn $H = \mathrm{Det}\,(H^{\sigma'\lambda}_{\lambda'\sigma}) \neq 0$ ist, können wir ebenso wie oben für die $E^{\sigma'\lambda}_{\lambda'\sigma}$ komplementäre Elemente $\breve{H}^{\sigma'\lambda}_{\lambda'\sigma}$ erklären und damit (3.30) nach b^{λ}_{σ} auflösen:

$$b^{\lambda}_{\sigma} = \breve{H}^{\sigma'\lambda}_{\lambda'\sigma}\left(\frac{2r+p}{r(p+2)}\,\breve{B}^{\beta\gamma}_{\varrho}\,\breve{B}^{\lambda'\alpha}_{\sigma'}\,A^{\varrho}_{\alpha\beta\gamma} - \breve{B}^{\lambda'\alpha}_{\varrho}\,\breve{B}^{\beta\gamma}_{\sigma'}\,A^{\varrho}_{\alpha\beta\gamma}\right). \tag{3.32}$$

Hierdurch ist mit (3.29) auch a_α festgelegt und damit nach (3.20) Γ^{*}_{α} und $\Gamma^{*\lambda}_{\beta\gamma}$. Wir finden so zunächst für Γ^{*}_{α} [mit (3.28b)]

$$\Gamma^{*}_{\alpha} = -\frac{1}{r(p+2)}\,\breve{B}^{\beta\gamma}_{\varrho}\,\omega^{\varrho}_{\alpha\beta\gamma} - \frac{p+2r}{r(p+2)}\,B^{\sigma}_{\alpha\lambda}\,\tau^{\lambda}_{\sigma} \tag{3.33a}$$

mit

$$\tau^{\lambda}_{\sigma} = \breve{H}^{\sigma'\lambda}_{\lambda'\sigma}\left(\frac{p+2r}{r(p+2)}\,\breve{B}^{\beta\gamma}_{\varrho}\,\breve{B}^{\lambda'\alpha}_{\sigma'}\,\omega^{\varrho}_{\alpha\beta\gamma} - \breve{B}^{\lambda'\alpha}_{\varrho}\,\breve{B}^{\beta\gamma}_{\sigma'}\,\omega^{\varrho}_{\alpha\beta\gamma}\right). \tag{3.33b}$$

[43]) Durch dieses wiederholte Einsetzen haben wir erreicht, daß sich die $\Gamma^{\sigma}_{\varrho\alpha}$ herausheben, wie man leicht bestätigt.

Aber auch für $\Gamma^{*\lambda}_{\beta\gamma}$ erhalten wir eine explizite Formel, wenn wir ebenso wie oben von (3.26) ausgehen, (3.32) und (3.29) einsetzen und (2.4a) verwenden:

$$(3.34)\quad \Gamma^{*\lambda}_{\beta\gamma} = \frac{1}{r}\breve{B}^{\lambda\alpha}_{\varrho}\,(\mathfrak{R}^{\varrho}_{\circ}\,\partial_{\alpha}\partial_{\beta}\partial_{\gamma}\mathfrak{x}_{\circ} - \partial_{\alpha}B^{\varrho}_{\circ\beta\gamma}) - B^{\varrho}_{\circ\beta\gamma}\,\tau^{\circ\lambda}_{\alpha} - 2\,\delta^{\lambda}_{(\beta}\Gamma^{*\circ}_{\circ\gamma)}.$$

Für $H \neq 0$ bestimmt sich mit (3.33) *und* (3.34) *aus* (3.15) *explizit ein eindeutig festgelegtes projektivinvariantes polares Basissystem, das von Ableitungen bis zur* **4.** *Ordnung von $\mathfrak{x}_{\circ}$ abhängt*[44]).

Für F_{n-1} ist $H^{\varrho'\lambda}_{\lambda'\sigma} \equiv 0$, vgl. § 3.3. Das einfachste Beispiel mit $H \neq 0$ bilden die F_2 im P_4, deren konjugierte Linien nicht zusammenfallen. Auf die einfache geometrische Bedeutung des Basissystems in diesem Fall können wir hier nicht eingehen, vgl. [4a]).

Wir wollen der 0-ten Apolaritätsbedingung noch eine andere Fassung geben. Dazu betrachten wir die von Sterntransformationen unabhängige Größe

$$(3.35)\quad \Delta_{\underbrace{1\ldots r}\ \underbrace{1\ldots p}_{(\circ)}}{}^{p+1} = |\mathfrak{x}_{\circ}, \mathfrak{x}_{\circ 1}, \cdots, \mathfrak{x}_{\circ p}, \mathfrak{u}_1, \cdots, \mathfrak{u}_r|^{45}),$$

deren durch die Indizes angezeigtes Transformationsverhalten unmittelbar aus der Definition abzulesen ist[46]). Hiermit erklären wir

$$(3.36)\quad D_{\underbrace{(1\ldots r)}}{}^{\frac{p}{2r}+1}{}_{(\circ)}{}^{\frac{p}{2}+1} = \Delta_{\underbrace{1\ldots r}\ \underbrace{1\ldots p}_{(\circ)}}{}^{p+1}\left(T^{\underbrace{(1\ldots r)}^{2p}}_{\underbrace{(1\ldots p)}^{4r}{}_{(\circ)}{}^{2rp}}\right)^{-\frac{1}{4r}}{}^{45}).$$

Der letzte Term ist dabei die durch die Formeln (1.21) bis (1.23) mit $i = 1$ erklärte Determinante $T_{(1)}$[40]); sie ist also aus den $B^{\varrho}_{\circ\alpha\beta}$ gebildet. Das Transformationsverhalten von D folgt aus der Definition. Es gilt

$$(3.37)\quad \nabla_{\alpha}\lg\Delta = 0;\quad \nabla_{\alpha}\lg T_{(1)} = 2\breve{B}^{\beta\gamma}_{\varrho}\,\nabla_{\alpha}B^{\varrho}_{\circ\beta\gamma} = 2\breve{B}^{\beta\gamma}_{\varrho}\,A^{\varrho}_{\circ\alpha\beta\gamma}.$$

---

[44]) Die Elemente $\Gamma^{*\circ}_{\circ\alpha}$ und $\Gamma^{*\lambda}_{\beta\gamma}$ hängen von Ableitungen bis zur 3. Ordnung ab. Bei der Bildung der $\mathfrak{u}_{\varrho}$ gemäß (3.15) kommt durch das in $\partial_{\alpha}\mathfrak{x}_{\circ\beta}$ auftretende Glied $\partial_{\alpha}\Gamma^{\circ}_{\circ\beta}$ eine weitere Ableitung hinzu. — Bei F_{n-1} pflegt man sich bei der Frage nach einer Projektivnormalen oft mit der von dem Flächenpunkt P und N_1 aufgespannten Geraden zu begnügen. Entsprechend würde es sich im Fall $m = 1$ nur um die Festlegung des durch P und N_1 aufgespannten $(n-p)$-dimensionalen projektiven Normalenraums handeln. Hierbei kommt man aber immer mit einer Ableitung weniger aus, als für die Festlegung von N_1 notwendig ist (im obigen Fall also mit 3. Ableitungen), indem man in (3.15) für die Bestimmung der Punkte $\mathfrak{u}_{\varrho}$ statt $\mathfrak{x}_{\circ\alpha}$ einfach $\partial_{\alpha}\mathfrak{x}_{\circ}$ setzt. Die so definierten Punkte sind dann aber bei Umnormierungen offenbar nur festgelegt bis auf eine Komponente nach $\mathfrak{x}_{\circ}$.

[45]) Zur Abkürzung lassen wir hier i. a. künftig die Transformationsindizes fort.

[46]) Dabei ist Δ bei $\mathfrak{G}(P_n)$ nicht invariant, sondern multipliziert sich mit der Transformationsdeterminante der Projektivität. Das bedeutet für das Folgende, daß die Normierungen von D (s. (3.36)) immer nur bis auf einen von u^{α} unabhängigen Parameter festgelegt sind. Ein solcher Faktor induziert aber stets nur eine unwesentliche Projektivität für unser Basissystem.

Die erste Gleichung folgt aus den Ableitungsgleichungen (1. 40) und die zweite aus (1. 29) und (1. 36)[23]. Die kovariante Ableitung von (3. 36) wird mit (3. 37)

$$(3.38)\quad \nabla_\alpha \lg D = \partial_\alpha \lg D - \left(\frac{p}{2r}+1\right)\Gamma^\varrho_{\varrho\alpha} - \left(\frac{p}{2}+1\right)\Gamma^\circ_{\circ\alpha} = -\frac{1}{2r}\,\overset{\circ}{B}{}^{\circ\beta\gamma}_{\varrho}\,A^\varrho_{\circ\alpha\beta\gamma}.$$

Hiermit können wir die 0-te Apolaritätsbedingung (3. 29) in der Form

$$(3.39)\quad (\nabla_\alpha \lg D)^* = \partial_\alpha \lg D - \left(\frac{p}{2r}+1\right)(\Gamma^\varrho_{\varrho\alpha} + B^\varrho_{\circ\lambda\alpha}\, b^{\circ\lambda}_\varrho) - \left(\frac{p}{2}+1\right)(\Gamma^\circ_{\circ\alpha} - a_\alpha) = 0$$

schreiben. Durch sie wird einem N_1 eindeutig ein N_0 zugeordnet. Umgekehrt wird durch (3. 39) einem gegebenen N_0 ein N_1 nur soweit eindeutig zugeordnet, wie es mit der Festlegung der Übertragungen $\Gamma^\varrho_{\varrho\alpha}$ für die r-stufigen Indizes $\underbrace{1\,..\,r}$ der Fall ist. Eine eindeutig bestimmte Zuordnung eines N_1 zu einem N_0 leistet ja vielmehr die 1-te Apolaritätsbedingung ($\mathrm{Det}\,(E^{\sigma'\lambda}_{\lambda'\sigma}) \neq 0$ vorausgesetzt).

Wir bemerken noch, daß man $\mathfrak{G}(U)$ und $\mathfrak{G}(N_1)$ in ausgezeichneter Weise dadurch koppeln kann, daß man verlangt, D solle bei den simultanen Transformationen dieser Gruppen ungeändert bleiben. Dann sind sie durch

$$(3.40)\qquad [\mathrm{Det}\,(d^\varrho_\varrho)]^{\frac{p}{2r}+1}\,\sigma^{\frac{p}{2}+1} = 1$$

miteinander gekoppelt. Dadurch entspricht jeder Transformation von $\mathfrak{G}(N_1)$ eine Umnormierung; umgekehrt ist aber durch eine Umnormierung nur die Determinante der Transformation von $\mathfrak{G}(N_1)$ festgelegt.

3. Hyperflächen. Für Hyperflächen F_{n-1} wird $r = 1$. $\mathfrak{G}(N_1)$ besteht jetzt nur noch aus den Umnormierungen des einzigen Basispunktes von N_1. Wir verwenden deshalb für $\mathfrak{G}(N_1)$ nur noch den einen Index ϱ[47]. Ferner wird

$$(3.41)\qquad \begin{aligned} T^{\varrho)^{2p}}_{\underbrace{(1\,..\,p)}^4\,(\circ)^{2p}} &= [\mathrm{Det}\,(B^\varrho_{\circ\alpha\beta})]^2; \\ D_{(\varrho)}{}^{\frac{p}{2}+1}_{(\circ)}{}^{\frac{p}{2}+1} &= |\,\mathfrak{x}_\circ, \ldots, \mathfrak{n}_\varrho\,|\,[\mathrm{Det}\,(B^\varrho_{\circ\alpha\beta})]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Die Koppelung von $\mathfrak{G}(U)$ und $\mathfrak{G}(N_1)$ in (3. 40) wird jetzt umkehrbar eindeutig, da $\mathrm{Det}\,(d^\varrho_\varrho)$ nur noch aus dem Element d^ϱ_ϱ besteht. Indem wir also $d^\varrho_\varrho\,\sigma = 1$ verlangen, können wir

$$(3.42)\qquad \Gamma^\circ_{\circ\alpha} + \Gamma^\varrho_{\varrho\alpha} = 0$$

setzen. Die 0-te und 1-te Apolaritätsbedingung fallen jetzt zusammen[48] (man braucht $\overset{\circ}{B}{}^{\circ\lambda\alpha}_{\varrho}\,\overset{\circ}{B}{}^{\circ\beta\gamma}_{\varrho}\,A^\varrho_{\circ\alpha\beta\gamma}$ nur mit $B^\varrho_{\circ\lambda\alpha'}$ zu überschieben, um $\overset{\circ}{B}{}^{\circ\beta\gamma}_{\varrho}\,A^\varrho_{\circ\alpha'\beta\gamma}$

[47]) Der Index ϱ wird jetzt mit seinem r-stufigen Index $\underbrace{1\,..\,r}$ gleichwertig.

[48]) Das äußert sich auch darin, daß $H^{\varrho\lambda}_{\lambda'\varrho}$ (3. 31) mit $E^{\varrho\lambda}_{\lambda'\varrho} = \delta^\lambda_{\lambda'}(p+2)$ und $r = 1$ identisch verschwindet.

zu erhalten). Durch sie wird jedem N_0 ein N_1 zugeordnet und umgekehrt. Zur Bestimmung des polaren Basissystems normieren wir $\mathfrak{x}_0$ so, daß $D = \text{const.}$ gilt [49]). Dann lautet die Apolaritätsbedingung (3. 39) mit (3. 42)

$$-B^{\varrho}_{0\lambda\alpha}\, b^{\lambda}_{\varrho 0} + a_\alpha = 0. \tag{3. 43}$$

Halten wir also den gegebenen N_0 fest (d. h. $a_\alpha = 0$), so folgt $b^{\lambda}_{\varrho 0} = 0$ und umgekehrt. *Für F_{n-1} erhält man das polare Basissystem, indem man $\mathfrak{x}_0$ so normiert, daß $D = \text{const.}$ gilt, und mit Hilfe des vorgegebenen N_0 $\Gamma^{0}_{0\alpha} = \partial_\alpha \mathfrak{x}_0 \circ \mathfrak{X}^0 = -\Gamma^{\varrho}_{\varrho\alpha}$ und damit aus (3. 17) $\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}$ bestimmt. N_1 wird dann durch den Punkt $\mathfrak{n}_\varrho$ in (3. 15) beschrieben* [50]). *Ist umgekehrt ein N_1 vorgegeben, so sind damit $\Gamma^{\varrho}_{\varrho\alpha} = \partial_\alpha \mathfrak{n}_\varrho \circ \mathfrak{N}^\varrho = -\Gamma^{0}_{0\alpha}$ bestimmt. Damit beschreiben die Punkte $\mathfrak{x}_{0\alpha}$ in (3. 15) den N_0, wobei $\mathfrak{x}_0$ so zu normieren ist, daß $D = \text{const.}$ wird.*

Während die A-Tensoren $A^{\varrho}_{0\alpha\beta\gamma}$ in (3. 18) i. a. von der Wahl der N_0, N_1 abhängen, erhalten wir für F_{n-1} bei der durch $D = \text{const.}$ festgelegten Normierung von $\mathfrak{x}_0$ mit (3. 43) aus (3. 18) einen ausgezeichneten A-Tensor, der nicht mehr von N_0, N_1 abhängt. Seine Komponenten sind (bis auf den Faktor -2) gerade die Koeffizienten der bekannten kubischen Differentialform, die man zusammen mit der durch die $B^{\varrho}_{0\alpha\beta}$ erklärten quadratischen Differentialform seit G. Fubini dem Studium der F_{n-1} zugrunde zu legen pflegt [49]).

Die tensorielle Behandlung der Hyperflächentheorie mit Hilfe von beliebigen durch die Apolaritätsbedingung gekoppelten N_0 und N_1 wurde zum erstenmal von G. Bol [51]) durchgeführt. *Das polare Basissystem führt für F_{n-1} auf die von G. Bol untersuchten Basissysteme.*

[49]) Man könnte $D = \text{const.}$ auch durch geeignete Normierung von $\mathfrak{n}_\varrho$ erreichen. In jedem Falle wird wegen (3. 41) damit gelten: $\Delta = c\,[\mathrm{Det}\,(B^{\varrho}_{0\alpha\beta})]^{\frac{1}{2}}$. Wegen

$$B^{\alpha}_{0\alpha\beta} = \mathfrak{N}^0 \circ \partial_\alpha \partial_\beta \mathfrak{x}_0 = |\,\mathfrak{x}_0, \partial_1 \mathfrak{x}_0, \ldots, \partial_\alpha \partial_\beta \mathfrak{x}_0\,|\, \Delta^{-1}$$

wird damit

$$\Delta^{n+1} = c^2\, \mathrm{Det}\,(|\,\mathfrak{x}_0, \partial_1 \mathfrak{x}_0, \ldots, \partial_\alpha \partial_\beta \mathfrak{x}_0\,|).$$

Mit diesem Wert erhalten wir aus

$$\mathfrak{N}^0 \circ \mathfrak{v} = |\,\mathfrak{x}_0, \partial_1 \mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{v}\,|\, \Delta^{-1}$$

für $\mathfrak{v} = d^2\mathfrak{x}$ die quadratische Grundform $\Phi_2 = \mathfrak{N}^0 \circ d^2\mathfrak{x}$ und mit

$$\Phi_3 = \mathfrak{N}^0 \circ d^3\mathfrak{x} - \tfrac{3}{2}\, d\,\Phi_2$$

die kubische Grundform der Hyperflächentheorie. Vgl. hierzu neben G. Fubini-E. Čech [1]), Kap. 12 auch L. Berwald, Die Grundgleichungen der Hyperflächen im euklidischen Raum gegenüber inhaltstreuen Affinitäten, Monatsh. Math. Phys. **32** (1922), S. 89—106.

[50]) Es versteht sich, daß man auch ohne eine solche Normierung das polare Basissystem direkt aus (3. 39) erhalten kann oder auch aus (3. 27) und (3. 28) mit den für F_{n-1} gültigen Vereinfachungen.

[51]) Vgl. [3]), insbesondere die Paragraphen 3, 4 und 6.

Zur Festlegung von N_0 kann man verschiedene Wege einschlagen. Es kommt offenbar darauf an, als Ersatz für die abhängige 0-te Apolaritätsbedingung eine andere lineare invariante Gleichung für die a_x aufzustellen. Dies ist nun nur unter Zuhilfenahme vierter Ableitungen von $\mathfrak{x}_0$ möglich. Indem wir auf die verschiedenen Möglichkeiten auf G. Bol[51]) verweisen, bemerken wir nur, daß die sog. *Fubinische Normale* durch

$$(3.\ 44)\qquad (\nabla_x \lg I_\varrho^0)^* = \partial_x \lg I_\varrho^0 - (\Gamma_{0x}^0 - a_x) + (\Gamma_{\varrho x}^\varrho + b_\varrho^{0\lambda} B_{0\lambda x}^\varrho) = 0$$

bestimmt wird. Dabei ist

$$(3.\ 45)\qquad I_\varrho^0 = A_{0\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^\varrho A_{0\beta_1\beta_2\beta_3}^\varrho \breve{B}_\varrho^{0\alpha_1\beta_1} \breve{B}_\varrho^{0\alpha_2\beta_2} \breve{B}_\varrho^{0\alpha_3\beta_3},$$

die sog. Picksche Invariante, ungleich Null vorauszusetzen; für die $A_{0\alpha\beta\gamma}^\varrho$ sind die erwähnten ausgezeichneten von N_0, N_1 unabhängigen A-Tensoren zu nehmen. (3. 44) legt mit (3. 42) und (3. 43) die a_x und damit N_0 fest.

Für die Affingeometrie pflegt man $D = \text{const.}$ durch geeignete Normierung von $\mathfrak{n}_\varrho$ zu erreichen[52]), da ja die Normierung von $\mathfrak{x}_0$ bereits in ausgezeichneter Weise festgelegt ist. Indem man diese Normierung festhält, kann man neben $\Gamma_{0x}^0 = 0$ auch $\Gamma_{\varrho x}^\varrho = 0$ setzen und damit die Apolaritätsbedingung (3. 39) erfüllen. Man erkennt, wie damit $\Gamma_{\beta\gamma}^\lambda$ in (3. 19) sich aus den Christoffelsymbolen der quadratischen Grundform und aus der kubischen Grundform (3. 18) zusammensetzt. $\Gamma_{\beta\gamma}^\lambda$ ist hier die sog. Berwaldsche Übertragung[53]). *Damit liefert das polare Basissystem im affinen Fall für eine F_{n-1} die bekannte von W. Blaschke und L. Berwald angegebene Affinnormale.*

[52]) Man erreicht dies durch die in [49]) angegebene Wahl von $\mathfrak{N}^\varrho$ mit der sich aus der affinen Normierung von $\mathfrak{x}_0$ ergebenden Vereinfachung. Vgl. W. Blaschke[5]), § 65 und L. Berwald[49]).

[53]) Vgl. W. Blaschke[5]), S. 169.

(Eingegangen am 10. September 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 3, S. 346—352 (1952).

Extremalprobleme für konvexe Bereiche der euklidischen Ebene[1]).

Von

D. Ohmann in Frankfurt a. M.

LEBESGUE zeigte als erster, daß ein Reuleauxdreieck unter allen Bereichen gleicher konstanter Breite minimalen Inhalt besitzt[2]). Mit einem der LEBESGUEschen Beweismethode nachgebildeten Verfahren soll hier gezeigt werden, daß unter allen Bereichen B, die bezüglich eines Eichbereichs B_0 gleiche konstante R-Breite ($R =$ „Relativ“)

$$b^*(\varphi) = \frac{2\,b(\varphi)}{b_0(\varphi)} \quad (b(\varphi),\ b_0(\varphi) = \text{Breite von } B, B_0 \text{ in der Richtung } \varphi)$$

besitzen, einem dem Reuleauxdreieck analogen dreiecksförmigen Bereich die entsprechende Minimaleigenschaft zukommt[3]).

Darauf aufbauend werden dann die Bereiche minimalen Inhalts bestimmt, für welche Dicke Δ und Umfang L bzw. Dicke Δ und Durchmesser D unter der Bedingung $2\sqrt{3}\,\Delta \geqq L \geqq \pi\,\Delta$[4]) bzw. $\frac{2}{3}\sqrt{3}\,\Delta \geqq D \geqq \Delta$ vorgegeben sind.

§ 1.

Vorbetrachtungen.

1. Es beschreibe der Ortsvektor $\mathfrak{r}$ den Rand des zentralsymmetrischen konvexen Bereiches B^*, und es mögen die Vektoren $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$ so gewählt sein, daß $\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_3 = 0$, so daß sie gleichsinnig aneinandergelegt ein geschlossenes Dreieck $A_1 A_2 A_3$ bilden (Fig. 1). Verbindet man dann die Eckpunkte A_j paarweise durch entsprechend gelegene Bogen von B^*, so entsteht ein dreiecksförmiger konvexer Bereich, den wir wegen seiner Verwandtschaft mit dem Reuleauxdreieck als allgemeines Reuleauxdreieck mit R bezeichnen (beim Reuleauxdreieck selbst ist B^* ein Kreis).

[1]) Diese Arbeit stellt eine Umarbeitung eines Teiles meiner Dissertation dar (Marburg 1948).

[2]) H. LEBESGUE: Sur le probleme des isopérimètres et sur les domaines de largeur constante. (Bull. Soc. Math. France C. R. 1914; S. 72—76.)

[3]) Dies bewies K. GÜNTHER gleichzeitig und unabhängig in seiner Dissertation (Marburg 1948).

[4]) Für die Lösung dieses Problems liegt eine hier zu bestätigende Vermutung von M. YAMANOUTI vor. (Notes on closed convex figures; Proc. Phys.-Math. Soc. Jap. (3) Bd. 14 (1932); S. 605—609.)

Aus der Konstruktion ist sofort zu entnehmen, daß B^* den Vektorbereich zu R darstellt, so daß für die Breite zu folgern ist:

$$b(B^*; \varphi) = 2\, b(R, \varphi).$$

Bezeichnen wir die Summe $t = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{3} \varphi_j$ der Richtungswinkel φ_j der bei der Konstruktion von R beteiligten Vektoren $\mathfrak{r}_j$ als Parameter von $R = R(B^*; t)$, so ist $R(B^*; t)$ bei festem „Bezugsbereich" B^* offenbar eindeutig und stetig auf seinen Parameter t bezogen.

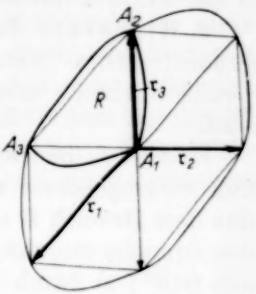

Fig. 1.

2. Aus der Konstruktion des allgemeinen Reuleauxdreiecks folgt, daß sich ihm in seinen Eckpunkten A_1; A_2; A_3 wenigstens ein Sechseck mit paarweise parallelen Seiten umbeschreiben läßt. Von jedem solchen Sechseck sagen wir dann, es sei R als Grundsechseck $G(R)$ zugeordnet.

Mit $\psi_j(G)$ $(j = 1, 2, 3)$ bezeichnen wir nun den Richtungswinkel der bei A_j im Orientierungssinn beginnenden Seite von $G(R)$ und mit $\psi_j'(R)$; $\psi_j''(R)$ seine Extremalwerte bei festgehaltenem R (Fig. 2):

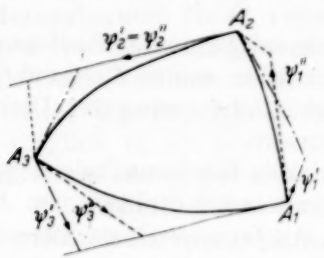

Fig. 2.

$$\psi_j'(R) = \min \psi_j(G), \quad \psi_j''(R) = \max \psi_j(G), \quad (G = G(R)).$$

Werden dann für die Grundsechsecke $G_\lambda(R)$ die Seitenrichtungen durch

$$\psi_j(R; \lambda) = \psi_j'(R) + \lambda(\psi_j''(R) - \psi_j'(R)) \quad (0 \leqq \lambda \leqq 1)$$

gegeben, so lassen sich die $G_\lambda(R)$ bei festem Bezugsbereich B^* und variablem R eindeutig und stetig auf den Parameter $s = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{3} \psi_j(R; \lambda)$ beziehen: $G_\lambda(R) = G(B^*; s)$.

3. Die Umkehrung zu 2. stellt die gleich zu beweisende Tatsache dar, daß ein Bereich B ein allgemeines Reuleauxdreieck ist, wenn sich ihm ein konvexes Sechseck S mit paarweise parallelen Seiten derart umbeschreiben läßt, daß S mit B drei paarweise nicht benachbarte Eckpunkte gemeinsam hat.

Zum Beweis habe S die Eckpunkte A_1, A_3 und A_5 mit B gemeinsam. Da S paarweise parallele Seiten besitzt, berühren die zu Stützgeraden durch $A_j (j = 1, 3, 5)$ paralellen Stützgeraden an den Bereich B diesen in Punkten des A_j gegenüberliegenden Randbogens $\overset{\frown}{A_k A_l}$ $(l, k = 1, 3, 5;$ $l \neq k; l, k \neq j)$. Damit weisen sich die Bogen $\overset{\frown}{A_k A_l}$ aber als Randbogen des zu B gehörenden Vektorenbereichs B^* aus, während die Strecken $\overline{A_k A_l}$ die gleiche Länge besitzen wie die gleichgerichteten Ortsvektoren

der auf ihren Mittelpunkt bezogenen Randkurve von B^*. Der Definition der allgemeinen Reuleauxdreiecke ist damit schon zu entnehmen, daß B ein solches darstellt, das B^* als Bezugsbereich besitzt.

4. Hilfssatz 1. Jedem konvexen Bereich läßt sich ein zentralsymmetrisches Sechseck umbeschreiben, dessen Seiten denen eines Grundsechsecks mit vorgegebenem Bezugsbereich paarweise parallel sind.

Beweis. Bezeichnet B den beliebigen konvexen Bereich und B^* den vorgegebenen zentralsymmetrischen Bezugsbereich, so möge $C(s)$ das dem Bereich B umbeschriebene Sechseck sein, dessen Seiten denen des Grundsechsecks $G(B^*; s)$ paarweise parallel sind. Da $G(B^*; s+\pi)$ aus $G(B^*; s)$ durch Drehung um π hervorgeht, ist $C(s+\pi) = C(s)$, so daß für die Länge $a_\mu(s)$ ($\mu = 1, 2, \ldots 6$) der im Umlaufsinn numerierten Seiten von $C(s)$

$$a_{\mu+3}(s) = a_\mu(s+\pi)$$

gilt. Auf $\langle 0, \pi \rangle$ muß es daher aus Stetigkeitsgründen eine Stelle $s = s_0$ geben, an der $a_{\mu+3}(s_0) = a_\mu(s_0)$ statthat und $C(s_0)$ mithin einen Mittelpunkt besitzt.

5. Hilfssatz 2. Symmetrisiert man ein allgemeines Reuleauxdreieck parallel zu der Verbindungssehne zweier seiner Eckpunkte, so entsteht ein allgemeines Reuleauxdreieck nicht geringerer Dicke (Dicke ≡ Minimum der Breite).

Beweis. Es sei $R(A_1; A_2; A_3)$ ein allgemeines Reuleauxdreieck mit dem Bezugsbereich B^*. Durch Symmetrisierung (nach Steiner) von B^* in der Richtung $\overline{A_2 A_3}$ möge der wiederum zentralsymmetrische Bereich B^{**} entstehen. Hatten wir dabei R derart auf B^* gelegt, daß A_1 mit dem Mittelpunkt von B^* zusammenfiel, so erkennt man, daß das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ bei dieser Symmetrisierung in ein Vektordreieck $A_1^* A_2^* A_3^*$ von B^{**} übergeht (Fig. 3). Das zu $A_1^* A_2^* A_3^*$ gehörige allgemeine Reuleauxdreieck R^* zum Bezugsbereich B^{**} ist dabei ersichtlich aus R durch die gleiche Symmetrisierung hervorgegangen. Beachten wir, daß die Dicke eines zentralsymmetrischen Bereichs bei Symmetrisierung nicht abnimmt, so folgt $\Delta(B^{**}) \geqq \Delta(B^*)$ und daraus schließlich

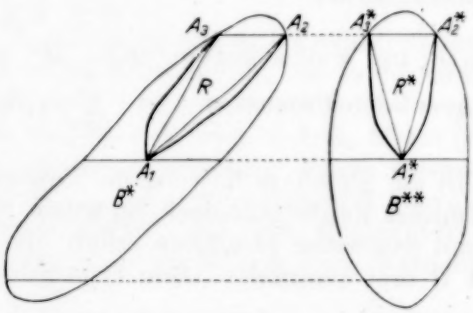

Fig. 3.

$$\Delta(R^*) \geqq \Delta(R).$$

6. Hilfssatz 3. Eine konvergente Folge von allgemeinen Reuleauxdreiecken konvergiert wieder gegen ein allgemeines Reuleauxdreieck.

Beweis. Die Folge von allgemeinen Reuleauxdreiecken $R_\nu (\nu = 1,2,\ldots)$ sei gegen den Bereich R^* konvergent. Dann läßt sich aus der Folge der zugeordneten Grundsechsecke G_ν eine konvergente Teilfolge $G_{a_1}, G_{a_2}, \ldots$ aussondern (Anwendung des Blaschkeschen Auswahlsatzes), die etwa gegen G^* konvergieren möge. G^* stellt dann wie die G_ν ein Sechseck mit paarweise parallelen Seiten dar, wobei man den entsprechenden Verhältnissen bei den G_ν und R_ν entnehmen darf, daß G^* dem Bereich R^* umbeschrieben ist, und daß drei paarweise nicht benachbarte Eckpunkte von G^* zu R^* gehören. Damit folgt aus 3., daß R^* ein allgemeines Reuleauxdreieck darstellt.

§ 2.

Die Minimaleigenschaft des allgemeinen Reuleauxdreiecks.

Es sei B ein beliebiger Bereich konstanter R-Breite bei festem Eichbereich B_0 und C das B umbeschriebene zentralsymmetrische Sechseck, dessen Seiten gemäß Hilfssatz 1 denen des Grundsechsecks G paarweise parallel seien. Hatten wir dabei den Vektorbereich B^* von B als Bezugsbereich für G zugrundegelegt, so besitzen dann B und das allgemeine Reuleauxdreieck R, dem G zugeordnet ist, nach § 1, 1 den gleichen Vektorbereich und mithin in gleichen Richtungen gleiche Breite. Damit weist sich aber auch R als von konstanter R-Breite bezüglich B_0 als Eichbereich aus, wie der Definition der R-Breite unmittelbar zu entnehmen ist.

Nun approximieren wir den Bereich B durch eine Folge ihm umbeschriebener Polygone $B_1, B_2, B_3, \ldots$; wobei $B_1 = C$ und $B_{\nu+1} (\nu = 1,2,\ldots)$ aus B_ν dadurch hervorgeht, daß wir durch ein Paar paralleler Stützgeraden an B von B_ν zwei Dreiecke β'_ν und β''_ν abtrennen. Ist dann R_ν das R umbeschriebene Polygon, das mit B_ν paarweise parallele Seiten besitzt, so ist $R_1 = G$, während $R_{\nu+1}$ aus R_ν durch Abtrennung nur eines Dreiecks γ_ν hervorgeht, da eine von zwei parallelen Stützgeraden an R stets durch einen gemeinsamen Eckpunkt von R und G hindurchgehen muß (Fig. 4).

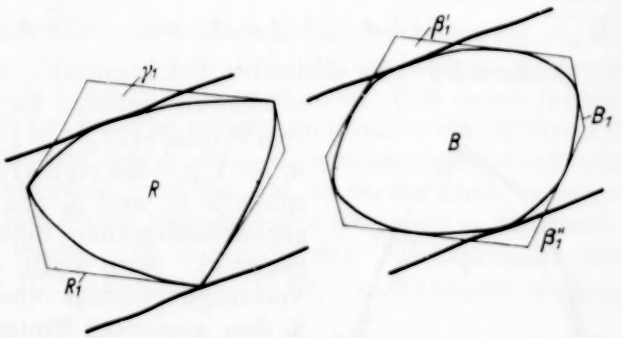

Fig. 4.

Die Eigenschaft, in gleichen Richtungen gleiche Breite zu besitzen, überträgt sich vom Bereichpaar B und R offensichtlich auf die Polygonpaare B_ν; R_ν, so daß für die Grund-

linien a und Höhen h der abgeschnittenen Dreiecke die Beziehungen bestehen

$$a(\beta_\nu') + a(\beta_\nu'') = a(\gamma_\nu),$$
$$h(\beta_\nu') + h(\beta_\nu'') = h(\gamma_\nu),$$

aus denen auf die Ungleichung zwischen den Inhalten geschlossen werden kann

$$F(\beta_\nu') + F(\beta_\nu'') = \tfrac{1}{2}(a(\beta_\nu')h(\beta_\nu') + a(\beta_\nu'')h\beta_\nu'') \leqq \tfrac{1}{2}a(\gamma_\nu)h(\gamma_\nu) = F(\gamma_\nu).$$

Hieraus folgt für die Fläche der B_ν und R_ν

$$F(B_\nu) - F(B_{\nu+1}) \leqq F(R_\nu) - F(R_{\nu+1}).$$

Wir brauchen nur noch hinzuzufügen, daß das Sechseck $C = B_1$ auf Grund seiner Zentralsymmetrie keinen geringeren Flächeninhalt besitzt als das Grundsechseck $G = R_1$, um die Ungleichung

$$F(B_\nu) \geqq F(R_\nu)$$

ablesen zu können.

Da sich B beliebig genau durch die B_ν approximieren läßt, folgt daraus schon die zu erweisende Beziehung

$$F(B) \geqq F(R),$$

die sich als Satz so formulieren läßt:

Unter allen Bereichen konstanter R-Breite besitzt ein allgemeines Reuleauxdreieck minimalen Inhalt.

§ 3.

Bereiche minimalen Inhalts bei vorgegebenem Δ, L bzw. Δ, D.

Bei Vorgabe von Dicke Δ und Umfang L bzw. Dicke Δ und Durchmesser D erhalten wir unter der Zusatzbedingung

$$(1) \qquad 2\sqrt{3}\,\Delta \geqq L \geqq \pi\Delta \quad \text{bzw.} \quad \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\,\Delta \geqq D \geqq \Delta$$

die gleichen Bereiche minimalen Flächeninhalts, die sich folgendermaßen beschreiben lassen: Es bezeichne K den Kreis vom Radius ϱ ($D \geqq \varrho \geqq \frac{2}{3}\sqrt{3}\,\Delta$) um den Eckpunkt A_j ($j = 1, 2, 3$) des regulären Dreiecks Γ des Durchmessers D, und S_j das von K_j durch die A_j gegenüberliegende Seite von Γ abgetrennte Segment. Dann stellt die konvexe Hülle der Vereinigungsmenge von Γ mit den Segmenten S_j den gesuchten Minimalbereich dar, den wir, da er von M. Yamanouti zuerst betrachtet wurde, als Y-Dreieck (Y = Yamanouti) bezeichnen.

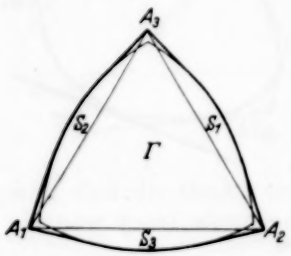

Fig. 5.

Wir erweitern das Problem noch dadurch, daß wir neben Δ statt L oder D ein allgemeineres Funktional Φ vor-

geben, das den Bedingungen genügen möge:

(2)
(a) Φ ist additiv, d. h. für $B_1 \supset B_2$ gilt: $\Phi(B_1) \geqq \Phi(B_2)$.

(b) Φ nimmt bei Symmetrisierung nicht zu.

(c) Unter allen Bereichen gleicher konstanter R-Breite besitzen die allgemeinen Reuleauxdreiecke minimales Funktional Φ.

(d) Die Y-Dreiecke lassen sich eindeutig und stetig auf die Parameter Δ und Φ beziehen, wobei ihr Inhalt $F = F(\Delta; \Phi)$ bei zunehmendem Δ bzw. abnehmendem Φ monoton nicht zunimmt.

Da L und D diesen Bedingungen unterworfen sind, genügt es, die folgenden Untersuchungen für das Funktional Φ durchzuführen. An die Stelle von (1) tritt dabei als Nebenforderung für Δ und Φ, daß ein Y-Dreieck existiere, das gerade die Funktionalwerte Δ und Φ annimmt.

Es sei nun B ein beliebiger konvexer Bereich und Y^* das Y-Dreieck, für das

$$\Delta(Y^*) = \Delta(B) \quad \Phi(Y^*) = \Phi(B) \tag{3}$$

besteht. Dann existiert ein allgemeines Reuleauxdreieck R_0, das bezüglich B als Eichbereich konstante R-Breite besitzt, und für das nach § 2 und (2c)

$$\Delta(R_0) = \Delta(B); \quad \Phi(R_0) \leqq \Phi(B); \quad F(R_0) \leqq F(B) \tag{4}$$

statt hat.

Nun erzeugen wir aus R_0 dadurch eine Folge von allgemeinen Reuleauxdreiecken $R_\nu (\nu = 1, 2 \ldots)$ mit den Eckpunkten $A_{\nu j}$ $(j = 1, 2, 3)$, daß wir $R_{\nu+1}$ aus R_ν durch Symmetrisierung in der Richtung $\overrightarrow{A_{\nu\varkappa} A_{\nu\lambda}}$ hervorgehen lassen, wobei $\varkappa$ und λ bei vorzugebendem ν durch $\nu \equiv \varkappa + 1 \pmod 3$ $\varkappa \equiv \lambda + 1 \pmod 3$ bestimmt seien. Daß dabei jeweils wieder allgemeine Reuleauxdreiecke entstehen, können wir Hilfssatz 2 entnehmen. Sondern wir von den R_ν dem Blaschkeschen Auswahlsatz entsprechend eine konvergente Teilfolge aus, so strebt diese vermöge Hilfssatz 3 gegen ein mit R^* zu bezeichnendes allgemeines Reuleauxdreieck, für das wir wegen der Invarianz des Flächeninhalts bei Symmetrisierung sowie Hilfssatz 2 und (2b) die drei Aussagen machen können:

$$\Delta(R^*) \geqq \Delta(R_0); \quad \Phi(R^*) \leqq \Phi(R_0): \quad F(R^*) = F(R_0). \tag{5}$$

Da R^* der Konstruktion der Folge R_ν entsprechend drei Symmetrieachsen besitzen muß, wird das Y-Dreieck gleicher Dicke, dessen Eckpunkte sich mit denen von R^* decken, ganz von R^* bedeckt. Wenn

wir es mit Y_0 bezeichnen, folgt aus (3), (4) und (5) also

$$\Delta(Y_0) \geqq \Delta(Y^*), \quad \Phi(Y_0) \leqq \Phi(Y^*), \tag{6}$$

sowie

$$F(Y_0) \leqq F(B). \tag{7}$$

Für den Inhalt von Y^* ergibt sich dann wegen (6) unter Berücksichtigung von (2 d) $F(Y^*) \leqq F(Y_0)$ und daher wegen (7) die zu erweisende Ungleichung

$$F(Y^*) \leqq F(B).$$

(Eingegangen am 27. Juli 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 3, S. 353—354 (1952).

Über ungerade vollkommene Zahlen.

Herrn Prof. H. Brandt zum 65. Geburtstag gewidmet.

Von

Otto Grün in Berlin.

Über den kleinsten Primteiler, der in einer ungeraden vollkommenen Zahl aufgeht, ist bisher als allgemeines Resultat nur bekannt:

Ist m eine ungerade vollkommene Zahl und p_1 der kleinste der n in m aufgehenden Primteiler, so ist $p_1 \leqq n$ [1]).

Für spezielle Fälle sind allerdings genauere Aussagen gemacht worden. Weiter ist bekannt, daß $n \geqq 6$ sein muß [2]). Hier soll die oben angegebene Grenze $p_1 \leqq n$ verschärft werden zu $p_1 < \frac{2}{3} n + 2$.

Es sei $m = \prod_{\nu=1}^{n} p_\nu^{a_\nu}$, $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$, eine ungerade vollkommene Zahl. Dann ist

$$2 = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{p_\nu^{a_\nu+1} - 1}{p_\nu^{a_\nu}(p_\nu - 1)} < \prod_{\nu=1}^{n} \frac{p_\nu}{p_\nu - 1}. \tag{1}$$

Da die p_ν ungerade Primzahlen sind, ist

$$p_2 \geqq p_1 + 2,\ p_3 \geqq p_2 + 2 \geqq p_1 + 4, \ldots,$$

allgemein

$$p_\nu \geqq p_1 + 2(\nu - 1). \qquad \nu = 2, \ldots, n.$$

Nun gilt für positive Zahlen $a > 1$:

$$\frac{a}{a-1} > \frac{a+1}{a} > \frac{a+2}{a+1} > \cdots. \tag{2}$$

Damit erhält man aus (1):

$$2 < \prod_{\nu=1}^{n} \frac{p_1 + 2\nu - 2}{p_1 + 2\nu - 3},$$

also

$$4 < \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{p_1 + 2\nu - 2}{p_1 + 2\nu - 3}\right)^2. \tag{3}$$

Auf Grund von (2) ist aber

$$\frac{p_1 + 2\nu - 2}{p_1 + 2\nu - 3} < \frac{p_1 + 2\nu - 3}{p_1 + 2\nu - 4},$$

[1]) Cl. Servais, Sur les nombres parfaits, Mathesis VIII., S. 92—93. Paris 1888.

[2]) U. Kühnel, Verschärfung der notwendigen Bedingungen für die Existenz von ungeraden vollkommenen Zahlen. Math. Zeitschr. Bd. **52** (1949), S. 202—211.

also

$$\left(\frac{p_1+2\nu-2}{p_1+2\nu-3}\right)^2 < \frac{p_1+2\nu-2}{p_1+2\nu-4}.$$

Setzt man die rechten Seiten dieser Ungleichung in (3) rechts ein, so erhält man

$$4 < \prod_{\nu=1}^{n} \frac{p_1+2\nu-2}{p_1+2\nu-4} = \frac{p_1+2n-2}{p_1-2},$$

also

$$3p_1 < 2n+6,\ p_1 < \frac{2n}{3}+2,\ \text{w. z. b. w.}$$

(Eingegangen am 30. Juli 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 3, S. 355—363 (1952).

Zwischenkörperverbände endlicher inseparabler Erweiterungen.

Von

Günter Pickert in Tübingen.

Bekanntlich bilden die Zwischenkörper Z einer Körpererweiterung $L|K$, d. h. die Körper Z mit $K \subseteq Z \subseteq L$, einen Verband [1]), wenn man als Verknüpfungen die *Durchschnittsbildung* $(Z \cap Z')$ und die *Kompositumbildung* (ZZ') nimmt. Es soll im folgenden untersucht werden, wann dieser Verband bei einer endlichen inseparablen [2]) Erweiterung *modular* ist, wann also für drei Zwischenkörper Z, Z', Z'' unter der Voraussetzung $Z \subseteq Z''$ stets $ZZ' \cap Z'' = Z(Z' \cap Z'')$ gilt.

Mit S als dem maximalen separablen Zwischenkörper [2]) von $L|K$, d. h. dem Körper, welcher aus den über K separablen Elementen von L besteht, folgt aus der Modularität des Zwischenkörperverbandes von $L|K$ natürlich auch die Modularität des Unterverbandes der Zwischenkörper $\subseteq S$, welcher also der Zwischenkörperverband der separablen Erweiterung $S|K$ ist. Die somit notwendige Modularität dieses Unterverbandes will ich hier nicht untersuchen. Mittels der Galoisschen Theorie läßt sie sich übrigens als Modularität eines gewissen Unterverbandes des Untergruppenverbandes einer endlichen Gruppe aussprechen. Es bleiben dann also nur noch die beiden Fragen zu beantworten: 1. *Wann ist der Zwischenkörperverband einer rein-inseparablen Erweiterung* (nämlich $L|S$) *modular?* 2. *Wann folgt aus der Modularität der Zwischenkörperverbände von $L|S$ und $S|K$ auch die Modularität des Zwischenkörperverbandes von $L|K$?* Damit überhaupt etwas zu untersuchen übrig bleibt, muß natürlich $L > S$ vorausgesetzt werden, so daß K ein unvollkommener Körper ist. Die Charakteristik von K muß somit eine Primzahl sein. Diese werde im folgenden stets mit p bezeichnet.

Zur Untersuchung der ersten Frage betrachte ich die endliche rein-inseparable Erweiterung $L|K$ (d. h. mit der oben verwandten Bezeichnung: ich setze $K = S$ voraus). Zu jedem $a \in L - K$ gibt es dann eine natürliche Zahl e mit $a^{p^e} \in K - K^p$, welche der *Exponent von a*

[1]) Zu den verbandstheoretischen Begriffen und Sätzen siehe G. Birkhoff: Lattice Theory, 2. Aufl., New York 1948, im folgenden als L zitiert.

[2]) Zu den im folgenden verwandten Begriffen und Sätzen über inseparable Erweiterungen siehe G. Pickert: Inseparable Körpererweiterungen, Math. Zeitschr. 52 (1949), S. 81—135, im folgenden als I zitiert.

bez. K heißt. Der zufolge der Endlichkeit von $L|K$ vorhandene größte Exponent e, für den also $L^{p^e} \leqq K$, aber nicht $L^{p^{e-1}} \leqq K$ gilt, heißt *Exponent der Erweiterung* $L|K$. Die kleinste natürliche Zahl m mit $L = K(a_1, \ldots, a_m)$ wird — übrigens bei jeder endlichen Erweiterung — die *Vielfachheit* von $L|K$ genannt. Bei einer Vielfachheit > 1 gibt es unendlich viele Zwischenkörper[3]), während bei $L = K(a)$ mit e als Exponent die $K(a^{p^i})$ $(i = 0, 1, \ldots, e)$ gerade die sämtlichen Zwischenkörper sind[4]). Daraus erkennt man, daß eine rein-inseparable Erweiterung $L|K$ genau dann keine echten (d. h. von L und K verschiedenen) Zwischenkörper besitzt, wenn ihr Grad $(L : K) = p$ ist. Daher besitzt die durch

$$p^{d(Z)} = (Z : K) \tag{1}$$

für die Zwischenkörper Z einer rein-inseparablen Erweiterung $L|K$ erklärte Funktion d die Eigenschaft, daß $d(Z') = d(Z) + 1$ im Falle $Z' \geqq Z$ dasselbe bedeutet wie: Z' ist oberer Nachbar von Z. Der Verband der Zwischenkörper ist somit *ausgeglichen*, d. h. er erfüllt die *Jordan-Dedekind-Bedingung*[5]), und $d(Z)$ ist wegen $d(K) = 0$ die (verbandstheoretische) Dimension von Z. Es handelt sich also bei endlicher Erweiterung $L|K$ jedenfalls um einen Verband endlicher Dimension d mit

$$p^d = (L : K). \tag{2}$$

Aus der bekannten Ungleichung

$$(Z\,Z' : Z) \leqq (Z' : Z' \cap Z) \tag{3}$$

folgt nun wegen (1)

$$d(Z\,Z') - d(Z) \leqq d(Z') - d(Z' \cap Z).$$

Der Verband ist also *nach oben halbmodular*, d. h. zwei Elemente, welche obere Nachbarn ihrer unteren Grenze sind, sind stets untere Nachbarn ihrer oberen Grenze. Da die Modularität bekanntlich[6]) darüber hinaus

$$d(Z) + d(Z') = d(Z \cap Z') + d(Z\,Z')$$

bedeutet, erkennt man noch mittels (1), daß die Modularität einfach die Gültigkeit der Gradgleichung

$$(Z\,Z' : Z) = (Z' : Z' \cap Z) \tag{4}$$

für alle Zwischenkörper Z, Z' besagt.

Aus der oben über die Zwischenkörper einer einfachen rein-inseparablen Erweiterung gemachten Angabe folgt:

---

[3]) E. Steinitz: Algebraische Theorie der Körper, J. f. M. 137 (1910), S. 244.
[4]) *I*, S. 87, Satz 6.
[5]) *L*, S. 11.
[6]) *L*, S. 68, Th. 3.

Der Zwischenkörperverband einer einfachen rein-inseparablen Erweiterung ist eine Kette.

Es gilt aber auch die Umkehrung:

Ist der Zwischenkörperverband einer endlichen rein-inseparablen Erweiterung eine Kette, so ist die Erweiterung einfach.

Denn wegen der aus (2) folgenden endlichen Dimension ist die Kette endlich, während eine mehrfache Erweiterung unendlich viele Zwischenkörper besitzt.

Nachdem ich so im einfachsten Falle die Modularität gezeigt habe, beweise ich jetzt, daß der Zwischenkörperverband bei einer Vielfachheit > 2 nicht modular ist. Es sei m die Vielfachheit von $L \mid K$ und $L = K(a_1, \ldots, a_m)$. Mit $L^p(K) = K(a_1^p, \ldots, a_m^p) = K'$ ist nun [7]) $(L : K') = p^m$. Folglich bilden die p^m Potenzprodukte $a_1^{i_1} \ldots a_m^{i_m}$ $(0 \leqq i_\nu < p)$ eine Basis von $L \mid K'$. Ich betrachte jetzt die beiden Zwischenkörper [8]) $Z = K'(a_1, a_2)$ und $Z' = K'(a_1 + a_2 a_3, a_3)$. Offensichtlich ist $(Z Z' : Z) = p$. Da $a_1 + a_2 a_3$ wegen der Basiseigenschaft der angegebenen Potenzprodukte nicht in $K'(a_3)$ liegt, gilt $(Z' : K') = p^2$. Die Ungültigkeit von (4) und damit die Nichtmodularität des Zwischenkörperverbandes ist daher bewiesen, wenn $Z \cap Z' = K'$ gezeigt werden kann. Sei nun $a \in Z \cap Z'$, also

$$a = \sum_{i,k=0}^{p-1} \alpha_{ik} a_1^i a_2^k = \sum_{i,k=0}^{p-1} \beta_{ik} (a_1 + a_2 a_3)^i a_3^k \quad (\alpha_{ik},\ \beta_{ik} \in K').$$

Formt man den letzten Ausdruck zu

$$\sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{p-1-i} \binom{i+k}{i} \sum_{h=0}^{p-1} \beta_{i+k,h} a_3^{h+k} a_1^i a_2^k$$

um, so ergibt die Tatsache, daß die $a_1^i a_2^k$ eine Basis von $K'(a_1, a_2, a_3) \mid K'(a_3)$ bilden, die Gleichungen

$$\alpha_{ik} = \binom{i+k}{i} \sum_{h=0}^{p-1} \beta_{i+k,h} a_3^{h+k} \quad \text{für } i + k < p.$$

Da weiter bei festem Wert k die a_3^{h+k} $(h = 0, 1, \ldots, p-1)$ eine Basis von $K'(a_3) \mid K'$ bilden, folgt

$$\beta_{i+k,h} = 0 \quad \text{für } h + k \not\equiv 0 \bmod p.$$

Da bei gegebenen Werten $i + k$ und h, welche nicht beide $= 0$ sind, stets k noch so bestimmt werden kann, daß $h + k$ kein Vielfaches von p ist, sind also höchstens mit Ausnahme von β_{00} alle $\beta_{ik} = 0$, d. h. $a \in K'$, was zu zeigen war.

---

[7]) M. T. Becker, S. Mac Lane: The minimum number of generators for inseparable algebraic extensions, Bull. Am. Math. Soc. 46 (1940), S. 182, Th. 6; siehe auch *I*, S. 88.

[8]) Im Grunde handelt es sich hier einfach um das Gegenbeispiel bei Mac Lane: A lattice formulation for transcendence degrees and p-bases, Duke Math. J. 4 (1938), S. 463 (unten); siehe auch *I*, S. 95 (unten).

Es liegt jetzt natürlich die Vermutung nahe, daß bei Vielfachheit 2 der Zwischenkörperverband modular ist. Zum Nachweis dieser Vermutung beweise ich (4), wobei offenbar die Fälle $Z' \geq Z$ und $Z \geq Z'$ als trivial außer Betracht bleiben können. Es gibt also ein Element $a \in Z - Z \cap Z'$. Die natürliche Zahl e sei der Exponent von a bez. $Z_0 = Z \cap Z'$. Da $a^{p^{e-1}}$ nicht in Z_0 liegt, ist es auch nicht in Z' enthalten. a hat somit auch bez. Z' den Exponenten e. Aus einer Normalform[9]) für die Erweiterung $Z' \mid Z_0$ wird somit durch Adjunktion von a eine solche für $Z'Z \mid Z_0$, so daß diese Erweiterung eine um 1 größere Vielfachheit besitzt als $Z' \mid Z_0$. Da nun $L \mid K$ die Vielfachheit 2 haben soll, hat natürlich $L \mid Z_0$ und daher auch[10]) $ZZ' \mid Z_0$ höchstens diese Vielfachheit. Somit muß $Z' \mid Z_0$ *einfach* sein: $Z' = Z_0(a')$. Unter Vertauschung von Z, a mit Z', a' zeigt dann das oben gewonnene Ergebnis, daß a' bez. Z denselben Exponenten besitzt wie bez. Z_0. Da der Grad einer einfachen Erweiterung bereits durch den Exponenten bestimmt wird, folgt aus dem letzten Ergebnis gerade die gewünschte Gleichung (4).

Es hat sich somit ergeben:

Der Zwischenkörperverband einer rein-inseparablen Erweiterung ist genau dann modular, wenn die Vielfachheit der Erweiterung < 3 *ist.*

Zur Untersuchung der zweiten Frage zeige ich zuerst:

Der Zwischenkörperverband einer endlichen Erweiterung $L \mid K$ *ist genau dann nach oben halbmodular, wenn dies für den Unterverband der in ihrem maximalen separablen Zwischenkörper* S *enthaltenen Zwischenkörper zutrifft.*

Daraus, daß der Unterverband der Zwischenkörper $\leq S$ ein Quotient ist, folgt die Notwendigkeit der Bedingung[11]). Ich brauche daher nur noch aus dieser Bedingung zu folgern, daß, wenn die Zwischenkörper Z, Z' obere Nachbarn von $Z_0 = Z \cap Z'$ sind, ZZ' oberer Nachbar von Z und Z' ist. Sind $Z \mid Z_0$ und $Z' \mid Z_0$ separabel, so führe ich noch den maximalen separablen Zwischenkörper $S_0 = S \cap Z_0$ von $Z_0 \mid K$ ein. Da $SZ_0 \mid Z_0$ separabel[12]) und $L \mid SZ_0$ rein-inseparabel ist, erkennt man SZ_0 als den maximalen separablen Zwischenkörper von $L \mid Z_0$. Daher liegen Z, Z' in SZ_0. Daß ZZ' oberer Nachbar von Z und Z' ist, folgt jetzt sofort aus der vorausgesetzten Halbmodularität nach oben des Zwischenkörperverbandes von $S \mid K$ und dem folgenden

Hilfssatz. *Ist* $S \mid S_0$ *separabel und* $Z_0 \mid S_0$ *rein-inseparabel, so ist der Zwischenkörperverband von* $SZ_0 \mid Z_0$ *isomorph zum Zwischenkörperverband von* $S \mid S_0$.

---

[9]) *I*, § 3; siehe auch G. Pickert: Eine Normalform für endliche rein-inseparable Körpererweiterungen, Math. Zeitschr. 53 (1950), S. 133—135.

[10]) *I*, S. 103, Satz 28; übrigens muß es dort natürlich „Zwischenkörper" statt „Zeichenkörper" heißen.

[11]) Ein beliebiger Unterverband eines nach oben halbmodularen Verbandes braucht nicht nach oben halbmodular zu sein!

[12]) *I*, S. 84, Satz 2.

Zum Beweis dieses Hilfssatzes sei X ein Zwischenkörper von $S \mid S_0$. Dann ist[12]) $XZ_0 \mid X$ rein-inseparabel, also X der maximale separable Zwischenkörper von $XZ_0 \mid S_0$:

$$X = XZ_0 \cap S. \tag{5}$$

Für einen Zwischenkörper Y von $SZ_0 \mid Z_0$ ist nun $Y' = (Y \cap S)Z_0$ ein Zwischenkörper von $Y \mid Z_0$. Nach dem eben Bewiesenen hat $Y' \mid S_0$ denselben maximalen separablen Zwischenkörper $Y \cap S$ wie $Y \mid S_0$, so daß $Y \mid Y'$ rein-inseparabel ist. Aus der Separabilität von $SZ_0 \mid Z_0$ folgt daher $Y = Y'$, also

$$Y = (Y \cap S)Z_0. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) ergibt sich, daß die Abbildung $X \to XZ_0$ des Zwischenkörperverbandes von $S \mid S_0$ in den von $SZ_0 \mid Z_0$ und die Abbildung $Y \to Y \cap S$ des Zwischenkörperverbandes von $SZ_0 \mid Z_0$ in den von $S \mid S_0$ zueinander invers (und damit Abbildungen „auf") sind. Da aus $X_1 \subseteq X_2$ und $Y_1 \subseteq Y_2$ stets $X_1 Z_0 \subseteq X_2 Z_0$ und $Y_1 \cap S_0 \subseteq Y_2 \cap S_0$ folgt, ist damit die behauptete Isomorphie bewiesen[13]).

Ist jetzt weiter $Z' \mid Z_0$ rein-inseparabel, also nach einer Bemerkung von S. 356 $(Z' : Z_0) = p$, so folgt aus (3) $(ZZ' : Z) \leqq p$. Das bedingt aber $(ZZ' : Z) = p$, weil aus $ZZ' = Z$ ja $Z' \leq Z$, also $Z' = Z_0$ folgen würde. ZZ' ist somit oberer Nachbar von Z. Ist auch noch $Z \mid Z_0$ rein-inseparabel, so haben wir damit ZZ' auch als oberen Nachbarn von Z' erkannt. Bei separabler Erweiterung $Z \mid Z_0$ folgt aber aus dem Hilfssatz und der Voraussetzung, daß $Z \mid Z_0$ keinen echten Zwischenkörper haben soll, dasselbe für $ZZ' \mid Z'$. Also ist auch in diesem Falle ZZ' oberer Nachbar von Z'. Damit habe ich den aufgestellten Satz bewiesen.

Die Zwischenkörper Z, welche denselben maximalen separablen Zwischenkörper $Z \cap S$ für $Z \mid K$ liefern, sind eineindeutig den Zwischenkörpern ZS von $L \mid S$ zugeordnet, wobei Z aus den über $Z \cap S$ rein-inseparablen Elementen von ZS besteht[14]). $Z \to (Z \cap S, ZS)$ stellt daher eine eineindeutige und offenbar in beiden Richtungen ordnungerhaltende Abbildung des Zwischenkörperverbandes von $L \mid K$ in das Kardinalprodukt[15]) der Zwischenkörperverbände von $S \mid K$ und $L \mid S$ dar. Die Menge der Paare $(Z \cap S, ZS)$ ist daher ein zum Zwischenkörperverband von $L \mid K$ isomorpher Verband mit derselben Teilordnungsbeziehung wie das erwähnte Kardinalprodukt, jedoch im allgemeinen kein Unterverband von diesem; denn aus einem im folgenden herzuleitenden Satz wird sich ergeben, daß der Zwischenkörperverband von $L \mid K$ nicht modular zu sein braucht, wenn die Zwischenkörperverbände von $L \mid S$ und $L \mid K$ und damit auch deren Kardinalprodukt modular sind. Jedenfalls aber folgt aus der angegebenen Zuordnung, der Endlich-

[13]) L, S. 21.

[14]) I, S. 86, Satz 4.

[15]) L, S. 7 u. 25.

keit des Zwischenkörperverbandes von $S|K$ und der auf S. 356 bewiesenen endlichen Dimension des Zwischenkörperverbandes von $L|S$:

Der Zwischenkörperverband einer endlichen Erweiterung hat endliche Dimension.

Daher bedeutet die Modularität dasselbe wie die Halbmodularität nach oben zusammen mit der nach unten[16]); dabei nenne ich einen Verband nach unten halbmodular, wenn zwei Elemente, welche untere Nachbarn ihrer oberen Grenze sind, stets obere Nachbarn ihrer unteren Grenze sind. Mit Rücksicht auf den vorletzten Satz brauche ich also den folgenden Satz, welcher meine zweite Frage beantwortet, nur noch für „nach unten halbmodular" zu beweisen:

Der Zwischenkörperverband einer endlichen Erweiterung $L|K$ ist genau dann modular bzw. nach unten halbmodular, wenn

1. *dasselbe für den Unterverband der im maximalen separablen Zwischenkörper S enthaltenen Zwischenkörper zutrifft,*
2. *die Vielfachheit der Erweiterung < 3 ist,*
3. *jeder Zwischenkörper Z, für den $Z|K$ eine Vielfachheit > 1 besitzt, S enthält.*

Die Notwendigkeit der ersten Bedingung folgt wieder daraus, daß der Zwischenkörperverband von $S|K$ ein Quotient im Zwischenkörperverband von $L|K$ ist. Die zweite Bedingung bedeutet nach einem Satz von S. 358 die Halbmodularität nach unten für den Zwischenkörperverband von $L|S$, denn dieser ist nach S. 356 ja stets nach oben halbmodular. Somit folgt die Notwendigkeit der zweiten Bedingung wieder aus der Quotienteneigenschaft des Zwischenkörperverbandes von $L|S$.

Ist nun die dritte Bedingung nicht erfüllt, so gibt es einen Zwischenkörper M mit $S_0 = M \cap S < S$, während $M|S_0$ eine Vielfachheit $m > 1$ hat. Mit $M = S_0(a_1, \ldots, a_m)$ und $Z_0 = S_0(M^p)$, $Z = Z_0(a_1, a_2)$ ergibt sich dann wie auf S. 357 $a_1^p, a_2^p \in Z_0$, $(Z : Z_0) = p^2$. Wegen $S_0 < S$ gibt es ein über S_0 separables Element b so, daß $S_0(b)$ oberer Nachbar von S_0 ist. Ich setze $Z' = Z_0(b, a_1 b + a_2)$. Dann ist $ZZ' = Z(b) = S_0(b)Z$ nach dem Hilfssatz von S. 358 oberer Nachbar von Z. Nun liegt a_1 nicht in Z', weil sonst $a_2 \in Z'$ und damit $Z \leqq Z'$ sein würde entgegen[10]) der Tatsache, daß $Z|Z_0$ zweifach, $Z'|Z_0$ dagegen nach dem Satz vom primitiven Element einfach ist. Aus $a_1^p \in Z'$ und $ZZ' = Z'(a_1)$ folgt daher $(ZZ' : Z') = p$, d. h. ZZ' ist auch oberer Nachbar von Z'. Kann ich jetzt noch $Z \cap Z' = Z_0$ zeigen, so habe ich nachgewiesen, daß der Zwischenkörperverband von $L|K$ nicht nach unten halbmodular sein kann und daß demgemäß die dritte Bedingung notwendig für die Halbmodularität nach unten ist. Nun läßt sich jedes Element $a \in Z'$ in der Form

$$a = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i (a_1 b + a_2)^i = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \alpha_i b^k a_1^k a_2^{i-k}$$

[16]) *L*, S. 68, Th. 3; Bedingungen (ξ) u. (ξ').

mit $\alpha_i \in Z_0(b)$ darstellen. Da die Menge der $a_1^i a_2^k (i, k = 0, 1, \ldots, p-1)$ als eine Basis von $Z \mid Z_0$ auch eine solche von $ZZ' \mid Z_0(b)$ ist[12]), folgt aus $a \in Z$ insbesondere

$$\alpha_i \in Z_0, \ \alpha_i b \in Z_0 \quad \text{für } i = 1, \ldots, p-1.$$

Wäre nun $\alpha_i \neq 0$, so müßte $b \in Z_0$ sein, was wegen $S_0(b) \cap Z_0 = S_0$ unmöglich ist. Also ergibt sich $a = \alpha_0$ und weiter wegen $Z_0(b) \cap Z = Z_0$ daraus $a \in Z_0$. Damit ist $Z \cap Z' = Z_0$ nachgewiesen.

Ich habe jetzt noch zu zeigen, daß umgekehrt aus den drei Bedingungen die Halbmodularität nach unten folgt. Ich setze also die Bedingungen als erfüllt voraus und betrachte zwei Zwischenkörper Z, Z', welche untere Nachbarn von ZZ' sind. Nach dem auf S. 358 Bewiesenen liegen die maximalen separablen Zwischenkörper M, M' von $Z \mid Z_0$ bzw. $Z' \mid Z_0$ — wobei wieder $Z \cap Z' = Z_0$ gesetzt ist — in $Z_0 S$, so daß nach dem Beweis des Hilfssatzes von S. 358 $M \cap S = MM' \cap S$ gleichbedeutend ist mit $M = MM'$, also $M' = Z_0$ — wegen $M \cap M' = Z_0$. Die dritte Bedingung zeigt daher, daß aus $M' > Z_0$ die Einfachheit von $Z \mid M \cap S$ und daher[10]) die von $Z \mid Z_0$ folgt. Da Z und Z' natürlich völlig gleichberechtigt sind, gilt also: $M' = Z_0$ oder $Z \mid Z_0$ einfach und $M = Z_0$ oder $Z' \mid Z_0$ einfach. Wieder wegen der Gleichberechtigung von Z und Z' brauche ich also nur die folgenden drei Fälle zu unterscheiden: 1. $Z' \mid Z_0$ einfach und $M' = Z_0$, 2. $M' = M = Z_0$, 3. $Z \mid Z_0$ und $Z' \mid Z_0$ einfach. Offenbar sind ZM' und MZ' die maximalen separablen Zwischenkörper von $ZZ' \mid Z$ bzw. $ZZ' \mid Z'$, so daß — da ZZ' oberer Nachbar von Z und Z' ist — $ZM' = Z$ oder $= ZZ'$ und $MZ' = Z'$ oder $= ZZ'$ gilt und dementsprechend $ZZ' \mid Z$ sowohl wie $ZZ' \mid Z'$ entweder rein-inseparabel oder separabel ist. Ich betrachte zuerst Fall 1 unter der Annahme $MZ' = ZZ'$, also $ZZ' \mid Z'$ separabel. Es gilt $Z' = Z_0(a)$ mit einem über Z_0 rein-inseparablen Element a. Wegen $ZZ' = MZ' = M(a)$ ergibt sich[4]) $Z = M(a^p)$, denn der Zwischenkörper Z von $ZZ' \mid M$ ist ja unterer Nachbar von ZZ'. Aus $a^p \in Z \cap Z' = Z_0$ folgt nun $(Z' : Z_0) = p$ und $Z = M$, so daß Z' und — mit Rücksicht auf den Hilfssatz von S. 358 — auch Z oberer Nachbar von Z_0 ist. Setze ich nun aber $MZ' = Z'$, also $ZZ' \mid Z'$ rein-inseparabel voraus, so ist wegen $M' = Z_0$ auch $ZZ' \mid Z_0$ rein-inseparabel und wegen der zweiten Bedingung von einer Vielfachheit[10]) < 3. Nach einem Satz von S. 358 sind daher Z, Z' obere Nachbarn von Z_0. Im zweiten Fall sind $Z \mid Z_0$ sowie $Z' \mid Z_0$ und damit auch $ZZ' \mid Z_0$ rein-inseparabel, so daß sich wie eben Z, Z' als obere Nachbarn von Z_0 ergeben. Im dritten Fall nehme ich zuerst $ZM' = Z$, also $ZZ' \mid Z$ rein-inseparabel an. Dann ist natürlich $M' = Z_0$, so daß wieder der schon erledigte erste Fall vorliegt. Da beim dritten Fall Z und Z' gleichberechtigt sind, brauche ich also nur noch die Möglichkeit zu untersuchen, daß $ZZ' = ZM' = MZ'$ gilt, also $ZZ' \mid Z$ sowohl wie $ZZ' \mid Z'$ separabel ist. Ein über Z_0 rein-inseparables Element von Z ist natürlich auch über Z' rein-inseparabel, als Element von ZZ' aber separabel

über Z' und damit in Z' enthalten. Wegen $Z_0 = Z \cap Z'$ enthält daher weder Z noch Z' ein über Z_0 rein-inseparables, nicht in Z_0 liegendes Element. Es sei $Z = Z_0(a)$, $Z' = Z_0(a')$ und e eine natürliche Zahl mit $a^{p^e} \in M$, $a'^{p^e} \in M'$. Nach dem Hilfssatz von S. 358 ist MM' oberer Nachbar von M und M'. Gehe ich nun zu den Zwischenkörpern $Z_0 \cap S$, $M \cap S$, $M' \cap S$, $MM' \cap S$ über, so erhalte ich — nach dem Verfahren auf S. 358 vor dem Hilfssatz — aus der ersten Bedingung meines Satzes, daß M und M' obere Nachbarn von $Z_0 = M \cap M'$ sein müssen. Da wegen $Z > Z_0$, $Z' > Z_0$ weder a^{p^e} noch a'^{p^e} in Z_0 liegen darf, folgt daher $Z_0(a^{p^e}) = M$, $Z_0(a'^{p^e}) = M'$. Ich setze $a'^{p^e} = b$. Mit $(ZZ' : Z) = n$ bilden dann die $b^i (i = 0, 1, \ldots, n-1)$ wegen $ZZ' = ZM' = Z(b)$ eine Basis von $ZZ' \mid Z$ und wegen der Gradgleichung [12]) $(MM' : M) = (ZZ' : Z)$ auch eine Basis von $MM' \mid M$. Wegen der Separabilität von $Z_0(b) \mid Z_0$ und $M(b) \mid M$ folgt nun $Z_0(b) = Z_0(b^{p^e})$, $M(b) = M(b^{p^e})$, so daß auch die $(b^{p^e})^i (i = 0, 1, \ldots, n-1)$ eine Basis von $MM' \mid M$ sowohl wie von $M' \mid Z_0$ bilden. Aus einer wegen $a' \in ZZ'$ möglichen Darstellung $a' = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i b^i$ mit $\alpha_i \in Z$ folgt jetzt $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^{p^e} (b^{p^e})^i \in M'$ und daher wegen der bewiesenen Basiseigenschaft $\alpha_i^{p^e} \in Z_0$. Daraus ergibt sich aber nach einer weiter oben hergeleiteten Tatsache $\alpha_i \in Z_0$, also $a' \in M'$ und damit $M' = Z'$. Infolge der Gleichberechtigung von Z und Z' ist natürlich auch $M = Z$. Damit sind Z, Z' auch im dritten Fall als obere Nachbarn von Z_0 nachgewiesen, was den Beweis des ausgesprochenen Satzes vollendet.

Die dritte Bedingung ist offenbar immer dann verletzt, wenn $L = MS$, $S > K$, $S \mid K$ separabel und $M \mid K$ rein-inseparabel von einer Vielfachheit $\geqq 2$ ist. Damit sind gerade die Zwischenkörperverbände der am einfachsten aufgebauten inseparablen Erweiterungen von einer Vielfachheit $\geqq 2$ als nichtmodular erkannt [17]). Ferner ist die dritte Bedingung immer dann verletzt, wenn die Vielfachheit von $L \mid K$ gleich dem Unvollkommenheitsgrad [18]) von K und > 1 ist; denn dann enthält [19]) L den Körper $K^{p^{-1}}$, während $K^{p^{-1}} \mid K$ dieselbe Vielfachheit besitzt wie $L \mid K$. Ich gebe noch ein Beispiel dafür an, daß die dritte Bedingung bei $S > K$ und Vielfachheit 2 wirklich erfüllt sein kann. Nach dem eben Bemerkten muß man dazu einen Grundkörper K von einem Unvollkommenheitsgrad $\geqq 3$ wählen. Ich nehme der Einfachheit halber einen Körper K vom Unvollkommenheitsgrad 3, so daß also $K^{p^{-1}} \mid K$ die Vielfachheit 3 besitzt: $K^{p^{-1}} = K(a_0, a_1, a_2)$. Ferner setze ich K als nicht separabel-abgeschlossen voraus, so daß es also eine echte

[17]) Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß ich versehentlich in der „Einführung in die höhere Algebra" (Göttingen 1951) auf S. 225 ein verkehrtes Beispiel für einen nichtmodularen Zwischenkörperverband angegeben habe.

[18]) *I*, S. 87/88.

[19]) *I*, S. 94, Satz 19.

separable Erweiterung $K(b)|K$ ohne echten Zwischenkörper gibt. Dann betrachte ich $L = K(a_0, b, a_1 b + a_2)$. Wäre $a_0 \in K(b, a_1 b + a_2)$ oder $a_1 b + a_2 \in K(b)$, so hätte $K(b, a_0, a_1, a_2)|K$ eine Vielfachheit $\leqq 2$, entgegen [10]) der Tatsache, daß $K(a_0, a_1, a_2)|K$ die Vielfachheit 3 besitzt. Daher ist $(L : K(b)) = p^2$, so daß $L|K$ wegen $L^p \leqq K(b)$ die Vielfachheit 2 besitzt. Durch dieselbe Rechnung wie auf S. 360 — mit $K(a_0)$ anstatt Z_0 — ergibt sich nun $L \cap K^{p^{-1}} = K(a_0)$. Da wegen $L^p \leqq K(b)$ kein Element von L einen Exponenten > 1 bez. K haben kann, enthält daher $K(a_0)$ sämtliche über K rein-inseparablen Elemente von L, womit die in Frage stehende dritte Bedingung nachgewiesen ist.

(Eingegangen am 1. Oktober 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 3, S. 364—384 (1952).

Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik.

(Erweitertes System).

Von

Wilhelm Ackermann in Lüdenscheid.

§ 1.

Einleitung.

Das Ziel dieser Untersuchungen ist das folgende: Es soll ein typenfreies logisches System aufgestellt werden, für das der Widerspruchsfreiheitsbeweis geführt werden kann. Das System soll genügend weit sein, um daraus ohne Hinzufügung besonderer mathematischen Axiome die Zahlentheorie und in einem gewissen Umfang auch die Analysis ableiten zu können. Der Grundgedanke des Systems ist eine gewisse Revision des Aussagenkalküls, die ich bereits an anderer Stelle ausführlich diskutierte[1]). Das vorliegende System entsteht aus dem früheren durch eine Erweiterung, die in der Hauptsache dazu dient, eine Einbeziehung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten vorzunehmen. Die Gedanken, die der Revision des Aussagenkalküls zugrunde liegen, sind die folgenden: 1. Da der Definitionsbereich der Prädikate, d. h. der Bereich der Dinge, für die das Zutreffen eines Prädikates sinnvoller Weise als richtig oder falsch bezeichnet werden kann, im allgemeinen beschränkt ist, so kann als Grundlage nur eine positive Logik genommen werden, die den Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht von vorneherein zugrunde legt. 2. Die Richtigkeit von Implikationen setzt im Prinzip voraus, daß zwischen Vorder- und Hinterglied der Implikation eine gewisse Gleichheit der semantischen Stufen besteht. 3. Die Einführung der Negation geschieht in eigentümlicher Weise. Die Unverträglichkeit der Richtigkeit und Falschheit einer Aussage wird postuliert. Die Falschheit der Identität zweier Dinge läßt sich unter Umständen direkt beweisen. Im übrigen wird die Negation komplizierterer Ausdrücke auf die einfacherer zurückgeführt. 4. Es kommen nur allgemeine Dingvariable vor, für die beliebige Dinge eingesetzt werden können und (wenigstens der Idee nach) allgemeine Aussagenvariable, für die beliebige Aussagen eingesetzt werden können. Diese Einsetzung ist auch dann gestattet,

[1]) W. Ackermann, Widerspruchsfreier Aufbau der Logik I. Typenfreies System ohne tertium non datur. Journal of Symbol. Logic 15, Nr. 1 (1950), S. 33–57.

wenn z. B. das Prinzip 2. dadurch verletzt wird, da trotzdem die wesentliche Form des Schlusses gewahrt bleibt. — Überhaupt wird eine Implikationsbeziehung bei beliebigen Einsetzungen für Variable als gültig angesehen, falls sie richtig ist, wenn man die Variablen auf gewisse vernünftige Werte beschränkt. Hat man nämlich mit Formeln zu tun, die nicht notwendig richtig oder falsch sind, so kann die Implikation nur als ein rein formaler Übergang von einer Formel zur anderen aufgefaßt werden, der bei Einsetzungen für etwa vorkommende Variablen gültig bleibt.

§ 2.

Das Axiomensystem.

Das Zeichenmaterial besteht aus (a) Zeichen für freie Variable $a, b, c, a_1, a_2, \ldots$; (b) Zeichen für gebundene Variable $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$; (c) Zeichen für Aussageverknüpfungen &, $\vee$, $\bar{}$, $\rightarrow$; (d) den Zeichen $\hat{x}, \hat{y}, \hat{x}\,\hat{y}, \ldots$; (e) den Zeichen $\{\ \}$, $(\ )$, $(\ ,\ )$, $\ldots$; (f) den Zeichen (x), (Ex), (y), (Ey), $\ldots$; (g) Zeichen für spezielle n-stellige Prädikate (z. B. kleine griechische Buchstaben) α^n, β^k, evtl. auch andere Symbole wie $\equiv$ (Zeichen für ein spezielles zweistelliges Prädikat).

Die Definition von „Formel" und „Term" geschieht durch simultane Rekursion nach den folgenden Regeln:

(1) Zeichen für freie Variable und für spezielle Prädikate sind Terme.

(2) Sind $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ und $\mathfrak{b}$ Terme, so ist $\{\mathfrak{b}\}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ eine Formel, (Statt $\{\equiv\}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ schreiben wir $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$).

(3) Mit $\mathfrak{A}$ ist $\overline{\mathfrak{A}}$ Formel.

(4) Mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind $(\mathfrak{A}) \,\&\, (\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}) \vee (\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{B})$ Formeln.

(5) Es sei $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ eine Formel mit den freien Variablen $a_1, \ldots, a_n$, in der die gebundenen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ nicht auftreten. $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ bezeichnet das formelähnliche Gebilde, das man erhält, wenn man in $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ jedes vorkommende a_i durch x_i ersetzt. $\hat{x}_1 \ldots \hat{x}_n (\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n))$ ist dann ein Term. Ebenso wie für $a_1, \ldots, a_n$ und $x_1, \ldots, x_n$ gilt die Regel entsprechend auch für andere freie und gebundene Variable.

(6) Die Formel $\mathfrak{A}(a)$ enthalte die freie Variable a, aber nicht die gebundene Variable x. Dann sind auch $(x)\mathfrak{A}(x)$ und $(Ex)\mathfrak{A}(x)$ Formeln, wobei $\mathfrak{A}(x)$ aus $\mathfrak{A}(a)$ so entsteht wie $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ aus $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ bei der vorigen Regel. Die Regel gilt entsprechend für andere freie und gebundene Variable.

Beim praktischen Gebrauch der Formeln lassen wir die Klammern vielfach weg, wenn die Art der Wiederhinzufügung eindeutig ist. Statt $\{y\}(x_1, \ldots, x_n)$ schreiben wir z. B. $y x_1 \ldots x_n$; bei $\hat{x}_1 \ldots \hat{x}_n$ lassen wir die folgende Klammer meist fort und ebenso in vielen anderen Fällen. Weitere Klammerersparnis erzielen wir dadurch, daß

wir festsetzen, daß $\vee$ stärker bindet als & und $\rightarrow$, ferner & stärker als $\rightarrow$. Fehlen hinter (x), (Ex), ... die zugehörigen Klammern, so ist das so zu verstehen, daß die Zeichenkombination bis vor das nächste Zeichen $\vee$, &, $\rightarrow$ in Klammern einzuschließen ist, bis zu dem diese Kombination eine Formel ist, bzw. durch Ersetzung von gebundenen Variablen durch freie in eine Formel übergeht.

Wir geben das Axiomensystem in Form von Axiomenschemata, indem wir auf die explizite Einführung von Aussagevariablen verzichten. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ bedeuten dabei beliebige Formeln, $\mathfrak{A}(a)$ eine solche, die die freie Variable a enthält, usw. Der Zusammenhang von gleichzeitig auftretenden $\mathfrak{A}(a)$ und $\mathfrak{A}(x)$ ist wie bei der Regel (6) zur Bildung von Formeln und Termen. $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n, \mathfrak{u}_1, \ldots$ bedeuten irgendwelche gebundene Variable; $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ irgendwelche Terme.

I. Grundformeln der positiven Aussagenlogik.

(1a) $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$ (1b) $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$

(2a) $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ (2b) $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$

(3) $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{B} \vee (\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{C})$

(4) $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \,\&\, (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}) \rightarrow (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C})$

(5) $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}) \,\&\, (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}) \rightarrow (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C})$

(6) $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \,\&\, (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}) \rightarrow (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C})$

(7) $(\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A})$

(8) $(\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \rightarrow (\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}) \vee (\Gamma \rightarrow \mathfrak{B})$

(9) $(\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}) \rightarrow \mathfrak{A}.$

II. Formeln der Prädikatenlogik.

(1) $(x)\,\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(a)$

(2) $\mathfrak{A}(a) \rightarrow (Ex)\,\mathfrak{A}(x)$

(3) $(x)\,(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(x)) \rightarrow (\mathfrak{A} \rightarrow (x)\,\mathfrak{B}(x))$

(4) $(x)\,(\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow ((Ex)\,\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B})$

(5) $(x)\,(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}(x)) \rightarrow \mathfrak{A} \vee (x)\,\mathfrak{B}(x)$

(6) $\mathfrak{A} \,\&\, (Ex)\,\mathfrak{B}(x) \rightarrow (Ex)\,(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}(x))$

(7) $(\Gamma \rightarrow (Ex)\,\mathfrak{A}(x)) \rightarrow (Ex)\,(\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}(x))$

(8a) $(\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)) \rightarrow \{\hat{x}_1 \ldots \hat{x}_n\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)\}\,(a_1, \ldots, a_n)$

(8b) $\{\hat{x}_1 \ldots \hat{x}_n\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)\}\,(a_1, \ldots, a_n) \rightarrow (\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)).$

III. Formeln für die Negation.

(1) $\mathfrak{A} \,\&\, \overline{\mathfrak{A}} \rightarrow \mathfrak{B}$

(2a) $\mathfrak{A} \rightarrow \overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ (2b) $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \rightarrow \mathfrak{A}$

(3a) $\overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}} \rightarrow \overline{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}$ (3b) $\overline{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}} \rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}$

(4a) $\overline{\mathfrak{A}} \,\&\, \overline{\mathfrak{B}} \rightarrow \overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$ (4b) $\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \,\&\, \overline{\mathfrak{B}}$

(5a) $(\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}) \,\&\, (\mathfrak{B} \rightarrow \overline{\Gamma}) \rightarrow \overline{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}}$

(5b) $\overline{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}} \rightarrow (\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}) \,\&\, (\mathfrak{B} \rightarrow \overline{\Gamma})$

(6a) $(E\,x)\,\overline{\mathfrak{A}(x)} \rightarrow \overline{(x)\,\mathfrak{A}(x)}$ (6b) $\overline{(x)\,\mathfrak{A}(x)} \rightarrow \overline{(E\,x)\,\mathfrak{A}(x)}$

(7a) $(x)\,\overline{\mathfrak{A}(x)} \rightarrow \overline{(E\,x)\,\mathfrak{A}(x)}$ (7b) $(E\,x)\,\overline{\mathfrak{A}(x)} \rightarrow \overline{(x)\,\mathfrak{A}(x)}$

(8a) $\{\hat{x}_1 \ldots \hat{x}_n \overline{\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)}\}(a_1, \ldots, a_n) \rightarrow \{\hat{x}_1 \ldots \hat{x}_n \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)\}(a_1, \ldots, a_n)$

(8b) $\{\hat{x}_1 \ldots \hat{x}_n \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)\}(a_1, \ldots, a_n) \rightarrow \{\hat{x}_1 \ldots \hat{x}_n \overline{\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)}\}(a_1, \ldots, a_n)$.

Bei II 3, II 5, II 6 darf $\mathfrak{A}$, bei II 4 $\mathfrak{B}$ nicht die gebundene Variable x enthalten.

IV. Formeln für spezielle Prädikate.

(1) $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}$ (2) $\overline{\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}}$.

Bei diesen Grundformeln enthalten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ keine freie Variable. IV 2 ist dann und nur dann zulässig, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ weder vollständig gleichgestaltet sind, noch durch Umbenennung der gebundenen Variablen ineinander übergehen. — Weitere Grundformeln für spezielle Prädikate können nach Analogie von IV 1 und IV 2 in der folgenden Art gebildet werden: Für die geordneten n-Tupel $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ von konstanten Termen sei eine Klasse definiert, so daß sich für jedes derartige n-Tupel angeben läßt, ob es zu der Klasse gehört oder nicht. Sei α^n ein Zeichen für ein spezielles n-stelliges Prädikat. Dann sind alle Formeln $\alpha^n \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ und $\overline{\alpha^n \mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_n}$ Grundformeln, falls $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ zu der Klasse gehört und $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ nicht. Die Klasse von n-Tupeln muß dabei so definiert sein, daß mit $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ auch $\mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_n$ dazu gehört, falls die $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}'_i$ gleich sind oder auseinander durch Umbenennung der gebundenen Variablen (entsprechend der folgenden Regel (A)) entstehen. Jedes Zeichen α^n darf nur für eine Art von Grundformeln gebraucht werden.

Ableitungsregeln.

(A) In einer Formel darf man die gebundenen Variablen umbenennen. Dies geschieht so, daß eine gebundene Variable $\mathfrak{u}$ innerhalb eines Zeichens $(\mathfrak{u})$ oder $(E\,\mathfrak{u})$ oder $\hat{\mathfrak{u}}, \hat{\mathfrak{u}}\,\hat{\mathfrak{u}}_1$ usw. und innerhalb der zugehörigen Klammer, die den Wirkungsbereich dieses Zeichens abgrenzt, überall durch eine andere Variable $\mathfrak{v}$ ersetzt wird, vorausgesetzt daß durch die Umbenennung überhaupt wieder eine Formel entsteht.

(B) In einer Formel darf man eine freie Variable an allen Stellen ihres Vorkommens durch den gleichen Term ersetzen.

(C) Aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erhält man $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$.
(D) Aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ erhält man $\mathfrak{B}$.
(E) Aus $\mathfrak{A}$ erhält man $\Gamma \to \mathfrak{A}$.
(F) Aus einer Formel $\mathfrak{A}(a)$ erhält man $(x)\mathfrak{A}(x)$.

Alle Grundformeln sind nur zulässig, wenn sie wirklich Formeln im Sinne unserer früheren Definition sind. Ebenso dürfen die Ableitungsregeln nur gebraucht werden, wenn sie wieder Formeln liefern. Das Zeichen Γ, das bei der Aufstellung der Grundformeln gebraucht wurde, ist eine Abkürzung für die Formel $\equiv \equiv \equiv$, die durch Einsetzung in IV 1 beweisbar ist.

Es dürfen nun zu dem bisherigen System weitere Grundformeln hinzugefügt werden, die wir aber nicht von vorneherein angeben können, sondern bei denen die Zulässigkeit ihrer Aufstellung von einer beweistheoretischen Überlegung abhängt. Wir wollen zunächst jeder Formel, die mit Hilfe von Grundformeln I—IV und Regeln (A)—(F) abgeleitet wird, eine natürliche Zahl bezüglich dieser Herleitung zuordnen, die wir ihren Rang nennen. Eine Grundformel erhält den Rang 1 mit Ausnahme der Grundformeln I 4, I 6, II 3, III 5a, die den Rang 3 erhalten. Außerdem erhalten diejenigen Grundformeln I 2a, I 2b und III 2a, die mit $\Gamma \to$ beginnen, den Rang 2. Die Regeln A, B und F lassen den Rang unverändert. E erhöht den Rang um 1. Bei C ist der Rang der Konklusion gleich dem Maximum der Rangzahlen der Prämissen. Bei D ist der Rang der Konklusion gleich dem Rang von $\mathfrak{A}$, falls der Rang von $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 1 ist. Ist im übrigen der Rang von $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ $n+1$ und m der Rang von $\mathfrak{A}$, so ist der Rang von $\mathfrak{B}$ Max (m, n). — Den Rang der Endformel einer Herleitung nennen wir auch kurz den Rang der Herleitung. — Es sei nun $\mathfrak{A}(a)$ irgend eine Formel, die die freie Variable a enthält. Für jeden konstanten Term $\mathfrak{a}$, für den $\mathfrak{A}(\mathfrak{a})$ überhaupt eine Formel darstellt, lasse sich eine Herleitung für $\mathfrak{A}(\mathfrak{a})$ angeben, und zwar so, daß keine Herleitung einer Formel $\mathfrak{A}(\mathfrak{a})$ einen größeren Rang hat als eine bestimmte Zahl k und daß dieser Rang bei einer Herleitung auch wirklich vorkommt. Dann dürfen wir $\mathfrak{A}(a)$ als weitere Grundformel hinzufügen, deren Rang übrigens k sein soll. Wir wollen derartige Grundformeln mit V 1 bezeichnen. Wir dürfen weiter Grundformeln $\mathfrak{B}(a)$ hinzufügen, wenn für jeden konstanten Term $\mathfrak{a}$, für den $\mathfrak{B}(\mathfrak{a})$ überhaupt eine Formel darstellt, sich eine Herleitung für $\mathfrak{B}(\mathfrak{a})$ aus Grundformeln I—IV und V 1 angeben läßt und zwar so, daß bei allen Herleitungen für eine Formel $\mathfrak{B}(\mathfrak{a})$ ein bestimmter Rang nicht überschritten wird. So kommen wir zu Grundformeln V 2 und weiter entsprechend zu Grundformeln V 3, V 4 usw. Wir haben dabei von der Aufstellung neuer Grundformeln gesprochen und nicht gesagt, daß es sich bei der Gewinnung dieser Formeln V 1, V 2, ... um eine besondere Ableitungsregel handelt. In der Tat scheint uns der Ausdruck „Ableitungsregel" nicht ganz am Platze.

Denn einmal würde es sich um eine Ableitungsregel mit unendlich vielen Prämissen handeln, so daß keine strenge Formalisierung des Denkens erfolgt, da ja die Tatsache, daß für jede der unendlich vielen Prämissen eine formale Ableitung angegeben werden kann, ein Ergebnis inhaltlicher Überlegungen ist. Zum anderen kommt bei uns der besondere Umstand hinzu, daß bei einer Regel dieser Art die Gewinnung der Konklusion nicht nur davon abhängen würde, daß die Prämissen überhaupt gewonnen werden, sondern auch wie sie gewonnen werden. Das würde meiner Ansicht nach allein die Nichtzulässigkeit der Regel als logisches Schlußverfahren bewirken. Es kommt mir hier nun darauf an zu zeigen, daß man gewisse weitere, nach bestimmten Prinzipien gewonnenen Grundformeln zu den Formeln I—IV hinzufügen darf, ohne daß die Widerspruchsfreiheit verloren geht. Unter einem bestimmten formalen System würde das System der Grundformeln I—III und eine bestimmte Auswahl aus den Grundformeln IV, V zu verstehen sein, die sich von vorneherein beschreiben läßt. Die Gesamtheit der Grundformeln V in den Widerspruchsfreiheitsbeweis einzubeziehen, bestehen keinerlei Bedenken. Regeln von ähnlichem Charakter wie unsere Regel zur Aufstellung der Grundformeln V sind von P. Lorenzen und K. Schütte verwandt worden[2]). Sie führen dort den Namen Regel der Induktion oder Regel der unendlichen Induktion.

Um ein Beispiel für eine Aufstellung von Grundformeln V zu geben, zeigen wir, daß die Formel $a \equiv b \vee a \equiv b$ eine Grundformel V 2 ist. Es sei nämlich $\mathfrak{b}$ irgend ein konstanter Term. Für jeden anderen konstanten Term $\mathfrak{a}$ ist dann entweder $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$ nach IV 1, eventuell unter Hinzunahme der Regel (A) beweisbar, oder aber nach IV 2 $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$. In jedem Falle ist also mit Hilfe der Grundformel I 2a oder I 2b und der Regel (D) $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b} \vee \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$ beweisbar und zwar durch einen Beweis vom Range 1. Demnach ist aber $a \equiv \mathfrak{b} \vee a \equiv \mathfrak{b}$ eine Grundformel V 1. Da dies für jeden Term $\mathfrak{b}$ gilt, ist $a \equiv b \vee a \equiv b$ eine Grundformel V 2. Im allgemeinen werden überhaupt die Grundformeln V in der Hauptsache dazu benutzt, den Satz vom ausgeschlossenen Dritten für besondere Fälle einzuführen.

Zum Gebrauch der Identität in unserem Kalkül bemerken wir noch: $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$ bedeutet nicht nur, daß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die gleiche Bedeutung haben, sondern daß sie auch formal in gleicher Weise gebildet sind (abgesehen von der Benennung der gebundenen Variablen). Die Relation $\equiv$ hat also einen metalogischen Charakter. Das gilt auch zum Teil für andere mit Hilfe der Grundformeln IV eingeführten spezielle

[2]) P. Lorenzen, Konstruktive Begründung der Mathematik. Math. Zeitschrift 53 (1950), S. 162—202.

K. Schütte, Beweistheoretische Erfassung der unendlichen Induktion in der Zahlentheorie. Math. Ann. 122 (1951), S. 369—389.

Prädikate. Das entspricht übrigens ganz der Tendenz dieser Arbeit, die ein Nebeneinander von mehreren metalogischen Stufen möglichst vermeiden will.

Um die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems zu zeigen, genügt es, die Nichtableitbarkeit von $\overline{\Gamma}$ darzutun.

§ 3.

Ein zweites Axiomensystem.

Die Durchführung des Widerspruchsfreiheitsbeweises geschieht im Prinzip nach der gleichen Methode wie in meiner in Anm. 1 zitierten Arbeit, in der ein Widerspruchsfreiheitsbeweis für das System ohne die Grundformeln V und IV angegeben wurde. Der frühere Beweis beruhte darauf, daß sich die Abtrennungsregel aus einer Beweisfigur entfernen ließ. Infolge der zusätzlichen Grundformeln V ist aber nicht mehr eine vollständige, sondern nur noch eine teilweise Entfernung der Abtrennungsregel möglich, die damit zusammenhängt, daß der intuitionistische Charakter des Axiomensystems verloren gegangen ist.

Zur Durchführung des Widerspruchsfreiheitsbeweises ist nun das in § 2 angegebene Axiomensystem weniger geeignet. Ich benutze dazu einen anderen, im folgenden zu entwickelnden Formalismus, der nur zu diesem Zwecke eingeführt wird und sonst weniger praktisch für deduktive Zwecke ist, schon weil er (absichtlich) nicht der Bedingung der Unabhängigkeit der vorhandenen Schlußweisen genügt. Um die Grundidee der teilweisen Entfernung der Abtrennungsregel durchzuführen, erweist sich eine Form des Kalküls als zweckmäßig, die in gewisser Weise an den Gentzenschen Sequenzenkalkül erinnert [3]). Doch werden keine Sequenzen benutzt, sondern statt dessen Formelreihen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{A}_n$, wobei die $\mathfrak{A}_1$ bis $\mathfrak{A}_n$ Formeln im Sinne von § 2 sind. Die Nebeneinanderstellung der durch Kommata getrennten Formeln hat den Sinn einer Disjunktion, obwohl formal zwischen $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ unterschieden wird [4]).

Angabe des Axiomensystems: „Formel" und „Term" haben die gleiche Bedeutung wie in § 2. Unter einer *Formelreihe* verstehen wir eine Reihe von durch Kommata getrennten Formeln oder auch eine einzige Formel, wenn die Formelreihe nur aus einem einzigen Glied besteht. Das Axiomensystem gibt an, wie Formelreihen abgeleitet werden.

Grundreihen sind alle Grundformeln des Systems von § 2, ferner auch alle solche Formeln, die aus Grundformeln I—III dadurch ent-

[3]) G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schließen. Math. Zeitschr. 39 (1934), 176—210 und 405—431.

[4]) Disjunktionsreihen statt der Gentzenschen Sequenzen werden auch von K. Schütte in der Abhandlung: Schlußweisenkalküle der Prädikatenlogik, Math. Ann. 122 (1950), 47—65, benutzt.

stehen, daß für die allgemeinen freien Variablen entsprechend der Regel B von § 2 irgendwelche Terme eingesetzt werden. Eine Ausnahme bilden die Grundformeln der Form $\Gamma \to \Gamma \vee \mathfrak{A}$; $\Gamma \to \mathfrak{A} \vee \Gamma$; $\Gamma \to \overline{\overline{\Gamma}}$. Diese sind keine Grundreihen. Mit jeder Grundreihe ist ferner jede andere Formelreihe Grundreihe, die daraus durch Umbenennung der gebundenen Variablen entsteht.

Ableitungsregeln.

Wir bezeichnen, ähnlich wie GENTZEN, mit Ψ, Θ, Ψ_1, Θ_1, ... Formelreihen unbestimmter Art; leere Formelreihen sind dabei eingeschlossen. Wir geben die Ableitungsregeln in Form von Ableitungsschemata, die im allgemeinen keiner weiteren Erklärung bedürfen. Die Schemata zerfallen in drei verschiedene Gruppen, die wir durch ein vorgesetztes S, N oder U andeuten.

S 1. $\dfrac{\Psi, \Theta}{\Psi, \mathfrak{A}, \Theta}$ S 2. $\dfrac{\Psi, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{A}, \Theta}$ S 3. $\dfrac{\Psi, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}, \Theta}$

N 1. $\dfrac{\Psi, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Theta}$ N 2. $\dfrac{\Psi, \mathfrak{A}, \Theta \qquad \Psi, \mathfrak{B}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}, \Theta}$

*N 3. $\dfrac{\Psi, \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, \Theta \qquad \Psi, \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}, \Theta}$ *N 4. $\dfrac{\Psi, \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, \Theta \qquad \Psi, \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C}, \Theta}$

N 5. $\dfrac{\Psi, \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}, \Theta \qquad \Psi, \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}, \Theta}$ N 6. $\dfrac{\Psi, \mathfrak{A}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}, \Theta}$

N 7. $\dfrac{\Psi, \mathfrak{A}, \Theta}{\Psi, \overline{\mathfrak{A}}, \Theta}$ N 8. $\dfrac{\Psi, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}, \Theta}$

N 9. $\dfrac{\Psi, \overline{\mathfrak{A}}, \Theta \qquad \Psi, \overline{\mathfrak{B}}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Theta}$ N 10. $\dfrac{\Psi, \mathfrak{A}, \Theta \qquad \Psi, \mathfrak{B} \to \overline{\Gamma}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{A} \to \overline{\mathfrak{B}}, \Theta}$

N 11. $\dfrac{\Psi, \mathfrak{A}(\mathfrak{a}), \Theta}{\Psi, (Ex)\,\mathfrak{A}(x), \Theta}$ *N 12. $\dfrac{\Psi, \mathfrak{A}(a), \Theta}{\Psi, (x)\,\mathfrak{A}(x), \Theta}$

*N 13. $\dfrac{\Psi, \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(a), \Theta}{\Psi, \mathfrak{A} \to (x)\,\mathfrak{B}(x), \Theta}$ *N 14. $\dfrac{\Psi, \mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{B}, \Theta}{\Psi, (Ex)\,\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}, \Theta}$

N 15. $\dfrac{\Psi, \mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n), \Theta}{\Psi, \{\hat{x}_1 \ldots \hat{x}_n\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)\}\, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n), \Theta}$

N 16. $\dfrac{\Psi, \overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)}, \Theta}{\Psi, \{\hat{x}_1 \ldots \hat{x}_n\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)\}\, (\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n), \Theta}$

*N 17. $\dfrac{\Psi, \overline{\mathfrak{A}(a)}, \Theta}{\Psi, (Ex)\,\mathfrak{A}(x), \Theta}$ N 18. $\dfrac{\Psi, \mathfrak{A}(\mathfrak{a}), \Theta}{\Psi, (x)\,\mathfrak{A}(x), \Theta}$

U 1. $\dfrac{\Psi, \langle \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \rangle}{\Psi, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}}$ U 2. $\dfrac{\Psi, \langle \mathfrak{A} \rangle \qquad \Theta, \langle (Ex)\,\mathfrak{B}(x) \rangle}{\Psi, \Theta, \langle (Ex)\,(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}(x)) \rangle}$ U 3. $\dfrac{\Psi, \langle \overline{\Gamma} \rangle}{\Psi}$

U 4. $\dfrac{\Psi, \langle (Ex)\,\mathfrak{A}(x) \rangle}{\Psi, \langle (Ex)\,(\Gamma \to \mathfrak{A}(x)) \rangle}$ U 5. $\dfrac{\Psi, \langle \Gamma \to \mathfrak{A} \rangle}{\Psi, \mathfrak{A}}$ U 6. $\dfrac{\Psi, \langle \mathfrak{A} \rangle \qquad \Theta, \langle \overline{\mathfrak{A}} \rangle}{\Psi, \Theta}$.

U 7. $\dfrac{\Psi_1, \langle \mathfrak{A}_1 \rangle \ldots \Psi_n, \langle \mathfrak{A}_n \rangle \qquad \Theta, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle}{\Psi_1, \ldots, \Psi_n, \Theta, \mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_m}$.

Alle Schemata gelten natürlich nur unter der Bedingung, daß wieder eine Formelreihe herauskommt. Mit jedem Schema dürfen Umbenennungen der gebundenen Variablen verbunden werden, ohne daß dies als ein besonderer Schritt zählt. Im übrigen bedürfen die mit S und N bezeichneten Schemata im allgemeinen keiner weiteren Erklärung. Die mit einem * versehenen Schemata dürfen nur mit gewissen Einschränkungen gebraucht werden. Bei N 3, N 4, N 13 darf $\mathfrak{A}$ nicht mit Γ identisch sein; bei N 12, N 13, N 14, N 17 dürfen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, außerdem bei N 13 $\mathfrak{A}$ und bei N 14 $\mathfrak{B}$ nicht die freie Variable a enthalten. Bei den U-Schemata bedeutet $\mathfrak{P}$, $\langle\mathfrak{A}\rangle$ eine der Formelreihen, die aus $\mathfrak{P}$ dadurch entstehen, daß man $\mathfrak{A}$ einmal oder mehrere Male zwischen die Formeln der Reihe $\mathfrak{P}$ einschiebt, und zwar an beliebiger Stelle, auch am Anfang oder am Ende. Bei U 7, das $n+1$ Prämissen enthält ($n \geqq 1$), bedeutet $\mathfrak{C}_i$ eine Formel der Gestalt $\mathfrak{A}_j \to \mathfrak{D}_i$ ($1 \leqq j \leqq n$; $1 \leqq i \leqq m$).

Jede Formel, die aus dem Axiomensystem von § 2 abgeleitet werden kann, läßt sich auch hier als Formelreihe mit einem einzigen Glied gewinnen. Denn zunächst sind sämtliche Grundformeln des früheren Systems jetzt Grundreihen mit alleiniger Ausnahme der Formeln $\Gamma \to \mathfrak{A} \vee \Gamma$; $\Gamma \to \Gamma \vee \mathfrak{A}$; $\Gamma \to \bar{\bar{\Gamma}}$. Diese lassen sich aber aus der Grundreihe Γ mit Hilfe von S 1, N 1, N 6 bzw. N 7, N 6 gewinnen. Ferner sind die Ableitungsregeln *C*, *D*, *E*, *F* in den Regeln N 2, U 7, N 6, N 12 enthalten. Die Regel *A*, angewandt auf Grundformeln, gibt wieder Grundreihen; im übrigen dürfen wir ja die Umbenennungsregel mit jedem Ableitungsschema verbinden. Die Einsetzungsregel brauchen wir nicht; denn wir können, falls Einsetzungen vorkommen, diese immer weiter bis zu den Grundformeln zurückverlegen. Einsetzungen in die Grundformeln I—III ergeben aber wieder Grundreihen. Einsetzungen in die Grundformeln V sind entweder wieder selbst derartige Grundformeln oder, falls es sich um die Einsetzung von konstanten Termen für alle freien Variablen handelt, beweisbar.

Um zu zeigen, daß das System von § 2 widerspruchsfrei ist, daß also in ihm die Formel $\bar{\Gamma}$ nicht abgeleitet werden kann, genügt es zu zeigen, daß das gleiche für das vorliegende System zutrifft.

§ 4.

Ordnungszahl einer Herleitung.

Eine Herleitung für eine Formelreihe in dem System des § 3 denken wir uns immer so aufgeschrieben, daß jede Formelreihe nur einmal als Prämisse eines Schlusses benutzt wird, indem wir die benutzten Grundreihen entsprechend oft hinschreiben und eventuell Beweisketten wiederholen.

Wir führen zunächst verschiedene Hilfsbegriffe ein. Jeder Formel (nicht Formelreihe) der Herleitung ordnen wir zwei natürliche Zahlen zu, die wir ihren *Rang* und ihren *Grad* nennen.

Der Grad einer Formel ist durch ihre Gestalt allein bestimmt, nicht aber der Rang. Dieser hängt von der Stellung der Formel in der Herleitung ab. Es können auch Formeln der gleichen Formelreihe verschiedenen Rang haben, sogar wenn sie gleichgestaltet sind. Um den Rang bequemer zu definieren, wollen wir bei den Schemata S 1—S 3, N 1—N 18, U 1—U 7 zwischen *Haupt-* und *Nebenformeln* des betreffenden Schemas unterscheiden. Die Hauptformeln sind die, die mit deutschen Buchstaben bezeichnet sind, während die Reihe der Nebenformeln durch Ψ, Θ usw. angedeutet ist. Jeder Formel der Konklusion eines Schemas, mit Ausnahme der zu S 1 gehörigen Hauptformel sind Formeln der Prämissen zugeordnet, nämlich einer Hauptformel der Konklusion die Hauptformeln der Prämissen und einer Formel der Reihe Ψ oder Θ, usw. die gleiche Formel von Ψ, Θ usw. bei den Prämissen.

Der Rang der einzigen Formel einer Grundreihe I—IV ist nun 1, mit Ausnahme von I 4, I 6, II 3, III 5 a, die den Rang 3 haben. Der Rang einer Formel der Konklusion eines Schemas bestimmt sich für die Schemata S 1—S 3, N 1—N 5, N 7—N 9, N 11—N 14, N 17, N 18, U 1—U 3, U 6 dadurch, daß er der größte Rang ist, der unter den zugeordneten Formeln der Prämissen vorkommt. Das gleiche gilt für alle Nebenformeln der Konklusion eines der übrigen Schemata. Bei N 6, N 15, N 16 und U 4 ist der Rang der Hauptformel der Konklusion um eins höher, als er sich nach dieser Regel ergeben würde. Bei N 10 ist der Rang von $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ gleich der größten der beiden Zahlen $m+1$ und n, wenn m der Rang von $\mathfrak{A}$ und n der Rang von $\mathfrak{B} \to \overline{\Gamma}$ ist. Die Hauptformel der Konklusion von S 1 hat den Rang 1. Bei U 5 hat die Formel $\mathfrak{A}$ den Rang δn, falls n der größte Rang ist, der bei den Formeln $\Gamma' \to \mathfrak{A}$ vorkommt. ($\delta n = n - 1$ für $n > 1$; $\delta 1 = 1$). Bei U 7 ist der Rang einer Formel $\mathfrak{D}_i$ gleich Max $(m, \delta n)$, falls $\mathfrak{C}_i$ die Gestalt $\mathfrak{A}_j \to \mathfrak{D}_i$ hat, m der maximale Rang unter den Formeln $\mathfrak{A}_j$ in Ψ_j, $\langle \mathfrak{A}_j \rangle$ und n der maximale Rang unter den Formeln $\mathfrak{C}_i$ ist. — Für die Grundformeln V war der Rang schon in § 2 angegeben. Falls übrigens die Herleitung im Rahmen des § 2 bleibt, ist der Rang einer Formel nach unserer jetzigen Definition der gleiche wie der damals angegebene.

Der Grad einer Formel wird rekursiv definiert. Formeln der Gestalt $\{\mathfrak{b}\}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ oder $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ haben den Grad 1. Der Grad von $\overline{\mathfrak{A}}$ ist um eins höher als der von $\mathfrak{A}$, der von $(x)\mathfrak{A}(x)$ und $(Ex)\mathfrak{A}(x)$ um eins höher als der von $\mathfrak{A}(a)$. Die Formeln $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ haben den Grad $m + n$, wenn m der Grad von $\mathfrak{A}$ und n der von $\mathfrak{B}$ ist.

Wir wollen weiter jeder Formelreihe einer Herleitung eine Ordnungszahl zuordnen. Ich benutze dabei eine Symbolik für Ordnungszahlen, die ich an anderer Stelle entwickelt habe[5]). Mit Hilfe dieser Symbolik wurden die Ordnungszahlen, von der Ordnungszahl 1 aus-

[5]) W. Ackermann, Konstruktiver Aufbau eines Abschnitts der zweiten Cantorschen Zahlenklasse. Math. Zeitschr. 53 (1951), 403—413.

gehend, mit Hilfe des Zeichens + und eines dreistelligen Klammerzeichens dargestellt. Für $1+1$, $1+1+1$,... gebrauchen wir die gewöhnlichen Zeichen 2, 3,... als Abkürzungen. Für $(1, 1, \alpha)$ gebrauchen wir auch, falls $\alpha < (1, 2, 1)$, die gewöhnliche Schreibweise ω^α als Abkürzung; für $\omega^2+\omega^2$, $\omega^2+\omega^2+\omega^2$, usw. schreiben wir auch $\omega^2 \cdot 2$, $\omega^2 \cdot 3$, usw. Kleine griechische Buchstaben brauchen wir im folgenden für Ordnungszahlen überhaupt; m, n, k, l, für Ordnungszahlen kleiner als ω. Von den Ergebnissen der genannten Arbeit werden vor allen Dingen die Kriterien zur Größenvergleichung der Ordnungszahlen im folgenden gebraucht, die ich daher hier noch einmal zusammenstelle. Es bezeichnen dabei π, ϱ, π_1, ϱ_1, σ, usw. Ordnungszahlen der Form 1 oder (α, β, γ).

I. $1 < \alpha \quad (\alpha \neq 1)$.

II. $\pi_1 + \cdots + \pi_m < \pi_1 + \cdots + \pi_m + \pi_{m+1} + \cdots + \pi_{m+k}$.

III. $\pi_1 + \cdots + \pi_m + \varrho_1 + \cdots + \varrho_k < \pi_1 + \cdots + \pi_m + \sigma_1 + \cdots + \sigma_l$, falls $\varrho_1 < \sigma_1$ $(m \geqq 0)$.

IV. $(\alpha, \beta, \gamma_1) < (\alpha, \beta, \gamma_2)$, falls $\gamma_1 < \gamma_2$.

V. $(\alpha, \beta_1, \gamma_1) < (\alpha, \beta_2, \gamma_2)$, falls $\beta_1 < \beta_2$ und $\gamma_1 < (\alpha, \beta_2, \gamma_2)$.

VI. $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) < (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, falls $\alpha_1 < \alpha_2$ und β_1, γ_1 beide $< (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$.

VII. $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) < (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, falls $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \leqq \gamma_2$ oder $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \leqq \beta_2$ oder $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \leqq \alpha_2$.

Mit Hilfe dieser Kriterien kann man für zwei verschiedene Ordnungszahlen immer feststellen, welche die kleinere und welche die größere ist. Das wird im folgenden ohne weitere Erklärung benutzt.

Die Zuordnung von Ordnungszahlen zu den Formelreihen geschieht so: Jede Grundreihe, mit Ausnahme einer Grundreihe V, erhält die Ordnungszahl 1. Grundreihen V 1, V 2, V 3,... haben die Ordnungszahlen $(\omega^3, 1, 1)$, $(\omega^3+1, 1, 1)$, $(\omega^3+2, 1, 1)$,.... Hat die Prämisse bei einem der S- oder N-Schemata die Ordnungszahl α (bzw. die Prämissen die Ordnungszahlen α und β), so ist $\alpha+1$ bzw. $(\alpha \dotplus \beta)+1$ die Ordnungszahl der Konklusion. Unter $\alpha \dotplus \beta$ verstehen wir dabei die „natürliche Summe" von α und β im Sinne Hessenbergs; d. h. wenn $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$ und $\beta = \beta_1 + \cdots + \beta_n$ wo die α_i und β_i entweder 1 sind oder die Form $(\delta, \varepsilon, \zeta)$ haben, so ist $\alpha \dotplus \beta = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{m+n}$, wobei die Reihe $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{m+n}$ eine absteigende Ordnung der α_i und β_i darstellt. Ist bei den Schemata U 1—U 5 α die Ordnungszahl der Prämisse bzw. die natürliche Summe der Ordnungszahlen der Prämissen, so ist $(1, 1, \alpha)$ die der Konklusion. Bei U 6 sei r der größte Rang, der unter den Formeln $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{A}}$ vorkommt, g der Grad von $\mathfrak{A}$, α die natürliche Summe der Ordnungszahlen der Prämissen. Die Ordnungszahl der Konklusion ist dann $(\omega^2 r + g, 1, \alpha)$. Bei U 7 möge r der maximale Rang sein, der unter den Formeln $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_m$ der Konklusion vorkommt. Die Prämissen $\mathfrak{P}_1, \langle \mathfrak{A}_1 \rangle \ldots \mathfrak{P}_n, \langle \mathfrak{A}_n \rangle$ und $\Theta, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle$ mögen die Ordnungszahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und β haben. Die Ordnungszahl der Kon-

klusion ist dann $(\omega^3 r + \omega, \beta, \alpha_1 \dot{+} \alpha_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \alpha_n)$. Unter der Ordnungszahl einer Herleitung verstehen wir die Ordnungszahl der Endreihe der Herleitung.

I. Eine Herleitung, die die Grundreihen V nicht benutzt, hat eine Ordnungszahl, die kleiner als $(\omega^3, 1, 1)$ ist.

Die Grundreihen I—IV haben nämlich die Ordnungszahl 1, die kleiner als $(\omega^3, 1, 1)$ ist. Ferner gilt: Ist $\alpha < (\omega^3, 1, 1)$, so auch $\alpha + 1$ und $(1, 1, \alpha)$. Sind α und β beide kleiner als $(\omega^3, 1, 1)$, so auch $\alpha \dot{+} \beta$, $(\omega^2 r + g, 1, \alpha)$ und $(\omega^2 r + \omega, \beta, \alpha)$. Das ergibt sich mit Hilfe der angegebenen Kriterien über die Größenvergleichung der Ordnungszahlen. Ebenso können wir zeigen, daß die Ordnungszahl einer Herleitung, die nur Grundreihen I—IV und V 1 benutzt, kleiner als $(\omega^3 + 1, 1, 1)$ ist, usw. Dieser Satz besagt also nichts anderes, als daß wir die Ordnungszahlen der Grundreihen V, die ja die Form $\mathfrak{A}(a)$ haben, so festgesetzt haben, daß wir für jede Formel $\mathfrak{A}(\mathfrak{a})$ mit konstantem $\mathfrak{a}$ eine Herleitung mit kleinerer Ordnungszahl angeben können.

II. Ändert man bei einer Herleitung den Beweis für eine dort benutzte Formelreihe so ab, daß die Ordnungszahl dieser Formelreihe sich verkleinert und daß keine Formel dieser Formelreihe einen größeren Rang als vorher erhält, und läßt man im übrigen die Herleitung unverändert, so wird die Ordnungszahl der gesamten Herleitung verkleinert.

Zunächst geht nämlich aus der Definition des Rangs hervor, daß in dem unveränderten Teile der Herleitung keine Formel einen größeren Rang erhält. Ferner geht aus der Art der Zuordnung von Ordnungszahlen zu den Formelreihen hervor, daß die Ordnungszahl einer Konklusion kleiner wird, falls die Ordnungszahl wenigstens einer der Prämissen kleiner, die der etwa vorhandenen anderen nicht größer wird und der Rang keiner Formel größer ist als vorher.

III. Man habe eine Herleitung für eine Formelreihe, die eine einzige freie Variable enthält. Betrachten wir nun eine zweite Formelreihe, die aus der ersten dadurch entsteht, daß die freie Variable überall durch einen konstanten Term ersetzt wird. Für diese Formelreihe läßt sich dann eine Herleitung angeben, deren Ordnungszahl nicht größer ist als die der ersten. Ferner hat jede Formel der zweiten Endreihe einen nicht größeren Rang als die entsprechende Formel der ersten Endreihe.

Wir verlegen nämlich die Einsetzungen bis in die Grundreihen zurück, wobei der Beweiszusammenhang durch die Schemata erhalten bleibt. Der Tatsache, daß einige Formeln der Herleitung infolge der Einsetzung ihren Formelcharakter verlieren könnten, können wir leicht dadurch begegnen, daß wir mit einigen Schemata geeignete Umbenennungen der gebundenen Variablen verbinden. Einsetzungen in die Grundreihen I—III ergeben aber wieder Grundreihen vom gleichen Rang und der gleichen Ordnungszahl. Einsetzungen in die Grund-

formeln V lassen sich beweisen und zwar so, daß die Ordnungszahl der durch Einsetzung entstehenden Formel nicht größer ist (Satz I). Der Rang ist ebenfalls gemäß der Definition der Grundformeln V nicht größer.

§ 5.

Der Widerspruchsfreiheitsbeweis.

Wir betrachten im folgenden nur solche Herleitungen, bei denen die Endreihe keine freien Variablen enthält. Ferner dürfen wir annehmen, daß eine derartige Herleitung keine überflüssigen freien Variablen enthält. Eine freie Variable heißt überflüssig, wenn sie in einer der Prämissen, aber nicht in der Konklusion auftritt, abgesehen von den bei den Schemata N 12, N 13, N 14, N 17 wesentlichen freien Variablen. Diese überflüssigen freien Variablen können wir nämlich immer durch Einsetzung entfernen. Unter dem *Endstück* einer Herleitung verstehen wir folgendes: Es gehört dazu die Endformelreihe, ferner mit jeder Formelreihe auch deren Prämissen, soweit diese keine freien Variablen enthalten, sonst aber nichts. Eine „oberste" Formelreihe eines Endstücks kann also nur nach N 12, N 13, N 14, N 17 zustande kommen, falls sie nicht Grundreihe ist, keinesfalls aber durch ein U-Schema.

Es liege nun eine Herleitung vor, bei der eine Formelreihe des Endstücks durch ein U-Schema zustande kommt. Wir zeigen, daß wir dann die Herleitung so verändern können, daß sie eine kleinere Ordnungszahl erhält. Dieser Nachweis wird den Hauptteil der nachfolgenden Ausführungen ausmachen. — Zunächst können wir im Endstück eine Formelreihe finden, die nach einem der Schemata U 1—U 7 zustande kommt, während ihre Prämissen entweder Grundformeln sind oder aber nach einem der Schemata S 1—S 3, N 1—N 18 sich ergeben. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

A) Es sei $\mathfrak{G}$ die Formelreihe, die als Konklusion des U-Schemas auftritt. Eine Prämisse von $\mathfrak{G}$ entstehe durch ein Schema S 1—S 3, oder durch ein Schema N 1—N 18, im letzten Falle aber so, daß keine Hauptformel des U-Schemas auch Hauptformel des N-Schemas ist.

Handelt es sich um ein Schema mit einer Prämisse $\mathfrak{F}$, so wird diese Formelreihe $\mathfrak{F}$ jetzt als die eine Prämisse des U-Schemas genommen; denn die Hauptformeln des U-Schemas kommen hier ja in gleicher Weise vor. Auf die Konklusion des U-Schemas wird dann das betreffende N-Schema angewandt und man erhält direkt oder nach Anwendungen des Schemas S 3 wieder $\mathfrak{G}$. Ebenso ist es, falls es sich um ein Schema S 1—S 3 statt des N-Schemas handelt. Unter Umständen erhält man dann auch aus $\mathfrak{F}$ direkt $\mathfrak{G}$ nach S 1, oder $\mathfrak{F}$ ist mit $\mathfrak{G}$ identisch. Der Rang der Formeln in der Formelreihe, deren Beweis geändert wurde, ist dabei nicht größer geworden. $\mathfrak{F}$ habe nun

die Ordnungszahl α. Die Ordnungszahl von $\mathfrak{G}$ bei der ursprünglichen Herleitung ist

a) $(1, 1, \alpha + 1)$,

b) $(\omega^2 r + m, 1, \alpha + \beta + 1)$,

c) $(\omega^2 r + \omega, \alpha + 1, \beta)$,

d) $(\omega^2 r + \omega, \beta, \alpha + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k + 1)$.

Bei der veränderten Herleitung ist sie höchstens

a) $(1, 1, \alpha) + n$,

b) $(\omega^2 r + m, 1, \alpha + \beta) + n$,

c) $(\omega^2 r + \omega, \alpha, \beta) + n$,

d) $(\omega^2 r + \omega, \beta, \alpha + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k) + n$

oder überhaupt nur $\alpha + n$. Sie ist also in jedem Falle kleiner geworden.

Handelt es sich um ein N-Schema mit zwei Prämissen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, so geht man ähnlich vor, indem auch hier die Reihenfolge des U-Schemas und des N-Schemas vertauscht wird. Wir wenden das U-Schema zweimal an, indem einmal $\mathfrak{F}_1$ und zum anderen $\mathfrak{F}_2$ als die eine Prämisse des U-Schemas genommen wird, während die anderen bleiben. Auf die beiden Konklusionen der U-Schemata wendet man das N-Schema an und erhält dann $\mathfrak{G}$, eventuell unter weiterer Anwendung von § 3. $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ mögen die Ordnungszahlen α und β haben. Die Ordnungszahl von $\mathfrak{G}$ bei der ursprünglichen Herleitung ist

a) $(1, 1, \alpha + \beta + 1)$,

b) $(\omega^2 r + m, 1, \alpha + \beta + \gamma + 1)$,

c) $(\omega^2 r + \omega, \alpha + \beta + 1, \gamma)$,

d) $(\omega^2 r + \omega, \gamma, \alpha + \beta + \delta_1 + \cdots + \delta_k + 1)$.

Bei der neuen Herleitung ist sie

a) $(1, 1, \alpha) + (1, 1, \beta) + n$,

b) $(\omega^2 r + m, 1, \alpha + \gamma) + (\omega^2 r + m, 1, \beta + \gamma) + n$,

c) $(\omega^2 r + \omega, \alpha, \gamma) + (\omega^2 r + \omega, \beta, \gamma) + n$,

d) $(\omega^2 r + \omega, \gamma, \alpha + \delta_1 + \cdots + \delta_k) + (\omega^2 r + \omega, \gamma, \beta + \delta_1 + \cdots + \delta_k) + n$.

Sie ist also kleiner geworden.

B) Der Fall A sei ausgeschlossen. Jede Prämisse des U-Schemas ist also entweder Grundreihe, und zwar eine Grundreihe I—IV, da die Grundreihen V freie Variable enthalten, oder aber sie entsteht durch ein N-Schema so, daß eine Hauptformel der Konklusion des N-Schemas auch Hauptformel der Prämisse des U-Schemas ist. Dieser Fall erfordert eine ausführliche Behandlung.

B 1) Es handele sich um ein U-Schema mit *einer* Prämisse, also um U 1, U 3, U 4, U 5.

Die Hauptformeln der Prämissen des U-Schemas haben hier die Gestalt $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\overline{\Gamma}$, $(E x)\mathfrak{A}(x)$ oder $\Gamma \to \mathfrak{A}$. Keine dieser Prämissen kann

Grundreihe sein. Eine der Hauptformeln der Prämisse muß also Hauptformel der Konklusion eines N-Schemas sein. Das ist bei U 3 nicht möglich, so daß dieser Fall ausscheidet. Im übrigen entsteht $\Psi, \langle \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \rangle$; $\Psi, \langle (E x) \mathfrak{A}(x) \rangle$ oder $\Psi, \langle \Gamma \to \mathfrak{A} \rangle$ entweder aus $\Psi_1, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Psi_2$; $\Psi_1, \mathfrak{A}(\mathfrak{a}), \Psi_2$; oder $\Psi_1, \mathfrak{A}, \Psi_2$ bzw. aus $\Psi_1, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Psi_2, \langle \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \rangle$; $\Psi_1, \mathfrak{A}(\mathfrak{a}), \Psi_2, \langle (E x) \mathfrak{A}(x) \rangle$ oder $\Psi_1, \mathfrak{A}, \Psi_2, \langle \Gamma \to \mathfrak{A} \rangle$ nach N 1, N 11 oder N 6. Im zweiten schwierigeren Falle wendet man auf die genannten Formeln jetzt das betreffende U-Schema an, das $\Psi_1, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Psi_2, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$; $\Psi_1, \mathfrak{A}(\mathfrak{a}), \Psi_2, (E x)(\Gamma \to \mathfrak{A}(x))$; $\Psi_1, \mathfrak{A}, \Psi_2, \mathfrak{A}$ liefert (Ψ_1, Ψ_2 ist mit Ψ identisch).

Die erste und letzte Formel ergeben durch Anwendung von S-Schemata die ursprüngliche Konklusion des U-Schemas; die mittlere nach Anwendung von N 6, N 11 und S-Schemata. Im ersten Falle ist es entsprechend einfacher, da die Anwendung des U-Schemas ganz wegfällt. Der Rang der Formeln der Reihe $\mathfrak{R}$, deren Beweis geändert wurde, ist nicht größer geworden. Hat nun die Formelreihe, aus der die Prämisse des ursprünglichen U-Schemas nach einem N-Schema entstand, die Ordnungszahl α, so ist die Ordnungszahl von $\mathfrak{R}$ bei der ursprünglichen Herleitung $(1, 1, \alpha + 1)$, bei der neuen Herleitung höchstens $(1, 1, \alpha) + n$ $(n < \omega)$, unter Umständen auch kleiner. Demnach hat sich die Ordnungszahl verringert.

B 2) Es handele sich um U 2.

Hier kann $\Theta, \langle (E x) \mathfrak{B}(x) \rangle$ nur nach N 11 aus einer Formel $\Theta_1, \mathfrak{B}(\mathfrak{a}), \Theta_2$ oder $\Theta_1, \mathfrak{B}(\mathfrak{a}), \Theta_2, \langle (E x) \mathfrak{B}(x) \rangle$ zustande kommen. Beim neuen Beweis erhält man aus $\Psi, \langle \mathfrak{A} \rangle$ nach S 1—S 3 $\Psi, \Theta_1, \mathfrak{A}, \Theta_2$; aus $\Theta_1, \mathfrak{B}(\mathfrak{a}), \Theta_2$ nach S 1 $\Psi, \Theta_1, \mathfrak{B}(\mathfrak{a}), \Theta_2$, aus den zuletzt erhaltenen Formeln nach N 2 $\Psi, \Theta_1, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}(\mathfrak{a}), \Theta_2$, weiter nach N 11 $\Psi, \Theta_1, (E x)(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}(x)), \Theta_2$ und dann $\Psi, \Theta, (E x)(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}(x))$ eventuell nach S 3. — Oder man erhält aus $\Psi, \langle \mathfrak{A} \rangle$ und $\Theta_1, \mathfrak{B}(\mathfrak{a}), \Theta_2, \langle (E x) \mathfrak{B}(x) \rangle$ zunächst nach U 2 $\Psi, \Theta_1, \mathfrak{B}(\mathfrak{a}), \Theta_2, (E x)(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}(x))$, ferner $\Psi, \Theta_1, \mathfrak{A}, \Theta_2, (E x)(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}(x))$ aus $\Psi, \langle \mathfrak{A} \rangle$ durch S 1—S 3, aus den letzten beiden Formeln $\Psi, \Theta_1, (E x)(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}(x)), \Theta_2, (E x)(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}(x))$ nach N 2 und N 11, dann $\Psi, \Theta, (E x)(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}(x))$ durch S 2 und S 3. Es habe $\Psi, \langle \mathfrak{A} \rangle$ die Ordnungszahl α, die Prämisse von $\Theta, \langle (E x) \mathfrak{B}(x) \rangle$ die Ordnungszahl β. Die Ordnungszahl von $\Psi, \Theta, (E x)(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}(x))$ bei der ursprünglichen Herleitung ist $(1, 1, \alpha \dotplus \beta + 1)$, bei der neuen ist sie $\alpha \dotplus \beta + n$ bzw. $(1, 1, \alpha \dotplus \beta) \dotplus \alpha + n$, also kleiner als vorher. Der Rang der einzelnen Formeln in der letzten Formelreihe ist dabei nicht größer geworden.

B 3) Es handele sich um U 6, also um das Schema $\dfrac{\Psi, \langle \mathfrak{A} \rangle \quad \Theta, \langle \overline{\mathfrak{A}} \rangle}{\Psi, \Theta}$.

$\mathfrak{A}$ hat eine der Gestalten 1) $\overline{\mathfrak{B}}$, 2) $\mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C}$, 3) $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$, 4) $\mathfrak{b}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$, 5) $(x)\mathfrak{B}(x)$, 6) $(E x)\mathfrak{B}(x)$, 7) $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$. Abgesehen von dem Falle 7) ist weder $\Psi, \langle \mathfrak{A} \rangle$ noch $\Theta, \langle \overline{\mathfrak{A}} \rangle$ Grundreihe. $\mathfrak{A}$ müßte nämlich dann die Gestalt 4) haben und $\mathfrak{b}$ wäre ein Zeichen für ein spezielles Prädikat. Da weder $\mathfrak{A}$ noch $\overline{\mathfrak{A}}$ dann die Hauptformel der Konklusion eines N-Schemas sein könnten, müßten beide Grundreihen sein, was nicht möglich

ist. — In den anderen Fällen mögen $\mathfrak{F}_1$ (bzw. $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$) die Prämissen von $\Psi, \langle \mathfrak{A} \rangle$, $\mathfrak{G}_1$ (bzw. $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$) die von $\Theta, \langle \overline{\mathfrak{A}} \rangle$ sein. Ferner wollen wir im folgenden eine leicht verständliche Symbolik für Beweise gebrauchen. Unter $\mathrm{N}k(\mathfrak{F}_1; \mathfrak{F}_2)$ verstehen wir eine Formelreihe, die aus $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ nach Nk entsteht, unter $\mathrm{U}l(\mathfrak{G})$ eine solche, die aus der einzigen Prämisse $\mathfrak{G}$ nach Ul entsteht, usw.

1) $\mathfrak{A}$ habe die Gestalt $\overline{\mathfrak{B}}$.

$\mathfrak{G}_1$ ist hier $\Theta_1, \mathfrak{B}, \Theta_2$ bzw. $\Theta_1, \mathfrak{B}, \Theta_2, \langle \overline{\mathfrak{B}} \rangle$. $\mathrm{U}6(\mathfrak{G}_1; \Psi, \langle \overline{\mathfrak{B}} \rangle)$ oder $\mathrm{U}6(\mathrm{U}6(\Psi, \langle \overline{\mathfrak{B}} \rangle; \mathfrak{G}_1); \Psi, \langle \overline{\mathfrak{B}} \rangle)$ gibt bei der neuen Herleitung, nachdem man eventuell noch einige Male S 2 und S 3 angewandt hat, Ψ, Θ. $\Psi, \langle \overline{\mathfrak{B}} \rangle$ habe die Ordnungszahl α, m sei der maximale Rang der Formeln $\overline{\mathfrak{B}}$ in dieser Reihe, g der Grad von $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{G}_1$ habe die Ordnungszahl β und k sei der maximale Rang der Formeln $\mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ in dieser Reihe. Sei ferner $r = \mathrm{Max}(m, k)$. Ψ, Θ hat zuerst die Ordnungszahl $(\omega^2 r + g + 1, 1, \alpha \dot{+} \beta + 1)$ und hinterher die kleinere $(\omega^2 r + g, 1, \alpha \dot{+} \beta) + n$ bzw. $(\omega^2 r_1 + g, 1, (\omega^2 r_2 + g + 1, 1, \alpha \dot{+} \beta) \dot{+} \alpha) + n$ $(r_1, r_2 \leqq r)$.

2) $\mathfrak{A}$ habe die Gestalt $\mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C}$.

$\mathfrak{F}_1$ ist $\Psi_1, \mathfrak{B}, \Psi_2$ bzw. $\Psi_1, \mathfrak{B}, \Psi_2, \langle \mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C} \rangle$; $\mathfrak{F}_2$ ist $\Psi_1, \mathfrak{C}, \Psi_2$ bzw. $\Psi_1, \mathfrak{C}, \Psi_2, \langle \mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C} \rangle$; $\mathfrak{G}_1$ ist $\Theta_1, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mathfrak{C}}, \Theta_2$ bzw. $\Theta_1, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mathfrak{C}}, \Theta_2, \langle \overline{\mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C}} \rangle$. — Es genüge, wenn wir hier und im folgenden die kompliziertere Gestalt der Prämissen betrachten, da die einfacheren Fälle immer entsprechend erledigt werden, es sind nur wie schon bei 2) einige U-Schemata entbehrlich.

$\mathrm{U}6(\mathrm{U}6(\mathfrak{F}_1; \Theta, \langle \overline{\mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C}} \rangle); \mathrm{U}6(\mathrm{U}6(\mathfrak{F}_2; \Theta, \langle \overline{\mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C}} \rangle); \mathrm{U}6(\Psi, \langle \mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C} \rangle; \mathfrak{G}_1)))$ gibt bei der veränderten Herleitung Ψ, Θ, nachdem eventuell noch S-Schemata angewandt worden sind. Es bedeuten $\alpha; \beta; \gamma; r; g_1; g_2$ die Ordnungszahlen von $\mathfrak{F}_1; \mathfrak{F}_2; \mathfrak{G}_1$; den maximalen Rang der Formeln $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mathfrak{C}}, \mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C}, \overline{\mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C}}$ in $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{G}_1$; den Grad von $\mathfrak{B}$; den Grad von $\mathfrak{C}$. Die ursprüngliche Ordnungszahl von Ψ, Θ ist $(\omega^2 r + g_1 + g_2, 1, \alpha \dot{+} \beta \dot{+} \gamma + 2)$; bei der neuen Herleitung hat sie die kleinere Ordnungszahl $(\omega^2 r_1 + g_1, 1, \delta_1 \dot{+} \delta_2) + n$, wo

$$\delta_1 = (\omega^2 r_2 + g_1 + g_2, 1, \alpha \dot{+} \gamma + 1),$$
$$\delta_2 = (\omega^2 r_3 + g_2, 1, \delta_3 \dot{+} \delta_4),$$
$$\delta_3 = (\omega^2 r_4 + g_1 + g_2, 1, \beta \dot{+} \gamma + 1),$$
$$\delta_4 = (\omega^2 r_4 + g_1 + g_2, 1, \alpha \dot{+} \beta \dot{+} \gamma + 1)$$

und $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 \leqq r$.

3) $\mathfrak{A}$ habe die Gestalt $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$.

$\mathfrak{F}_1$ ist hier $\Psi_1, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \Psi_2, \langle \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \rangle$; $\mathfrak{G}_1$ ist $\Theta_1, \overline{\mathfrak{B}}, \Theta_2, \langle \overline{\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}} \rangle$; $\mathfrak{G}_2$ ist $\Theta_1, \overline{\mathfrak{C}}, \Theta_2, \langle \overline{\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}} \rangle$. Die Vereinfachung der Herleitung geschieht ganz ähnlich wie im Falle 3).

4) $\mathfrak{A}$ habe die Gestalt $\{\mathfrak{b}\}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$.

Soll die letzte Formel Hauptformel der Konklusion eines N-Schemas sein, so ist die Gestalt von $\mathfrak{A}$ genauer $\{\hat{x}_1 \ldots \hat{x}_n \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)\}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$. $\mathfrak{F}_1$ ist $\Psi_1, \mathfrak{B}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n), \Psi_2, \langle \mathfrak{A} \rangle$; $\mathfrak{G}_1$ ist $\Theta_1, \overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)}, \Theta_2, \langle \overline{\mathfrak{A}} \rangle$.

U 6 (U 6 ($\mathfrak{F}_1$; Θ, $\langle\overline{\mathfrak{A}}\rangle$); U 6 ($\Psi$, $\langle\mathfrak{A}\rangle$; $\mathfrak{G}_1$)) gibt die neue Herleitung von Ψ, Θ. α und β seien die Ordnungszahlen von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{G}_1$, r der maximale Rang der Formeln $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{A}}$ in Ψ, $\langle\mathfrak{A}\rangle$ und Θ, $\langle\overline{\mathfrak{A}}\rangle$, g der Grad von $\mathfrak{B}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{a}_n)$. Ψ, Θ hat zuerst die Ordnungszahl $(\omega^2 r + 1, 1, \alpha \dot{+} \beta \dot{+} 2)$ und hinterher höchstens die Ordnungszahl

$$(\omega^2 r_1 \dot{+} g, 1, (\omega^2 r_2 \dot{+} 1, 1, \alpha \dot{+} \beta + 1) \dot{+} (\omega^2 r_3 \dot{+} 1, 1, \alpha \dot{+} \beta + 1)) + n$$
$$(r_1 < r; \quad r_2, r_3 \leqq r).$$

5) $\mathfrak{A}$ habe die Gestalt $(x)\mathfrak{B}(x)$.

$\mathfrak{F}_1$ ist Ψ_1, $\mathfrak{B}(a)$, Ψ_2, $\langle(x)\mathfrak{B}(x)\rangle$; $\mathfrak{G}_1$ ist Θ_1, $\mathfrak{B}(\mathfrak{a})$, Θ_2, $\langle(x)\mathfrak{B}(x)\rangle$. Nach Satz III von § 4 erhält man eine Herleitung für Ψ_1, $\mathfrak{B}(\mathfrak{a})$, Ψ_2, $\langle(x)\mathfrak{B}(x)\rangle$, deren Ordnungszahl nicht größer ist als die von $\mathfrak{F}_1$ und bei der keine Formel einen höheren Rang hat als die entsprechende vorher. Im übrigen verfahren wir wie bei 4).

6) $\mathfrak{A}$ habe die Gestalt $(Ex)\mathfrak{B}(x)$.

$\mathfrak{F}_1$ ist Ψ_1, $\mathfrak{B}(\mathfrak{a})$, Ψ_2, $\langle(Ex)\mathfrak{B}(x)\rangle$; $\mathfrak{G}_1$ ist Θ_1, $\mathfrak{B}(a)$, Θ_2, $\langle(Ex)\mathfrak{B}(x)\rangle$. Wir verfahren analog zu 5).

7) $\mathfrak{A}$ habe die Gestalt $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$.

$\mathfrak{G}_1$ ist Θ, $\mathfrak{B}$, Θ_2, $\langle\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}\rangle$; $\mathfrak{G}_2$ ist Θ_1, $\mathfrak{C} \to \overline{\Gamma}$, Θ_2, $\langle\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}\rangle$. Der neue Beweis für Ψ, Θ wird durch

$$\text{U 3 (U 7 (U 7 (U 6 (}\Psi, \langle\mathfrak{A}\rangle; \mathfrak{G}_1); \Psi, \langle\mathfrak{A}\rangle); \text{ U 6 (}\Psi, \langle\mathfrak{A}\rangle; \mathfrak{G}_2)))$$

und eventuelle Anwendungen von S-Schemata gegeben. Sei α die Ordnungszahl von Ψ, $\langle\mathfrak{A}\rangle$; β und γ die von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$; m der Rang von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{G}_1$; n der Rang von $\mathfrak{C} \to \overline{\Gamma}$ in $\mathfrak{G}_2$; k der maximale Rang der Formeln $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ in $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$; l der maximale Rang der Formeln $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ in Ψ, $\langle\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}\rangle$. Die ursprüngliche Ordnungszahl von Ψ, Θ ist $(\omega^2 r + 1, 1, \alpha \dot{+} \beta \dot{+} \gamma + 1)$, wo $r = \text{Max}(m + 1, n, k, l)$. Die neue ist höchstens $(1, 1, \delta_1) + p$ $(p < \omega)$, wobei

$$\delta_1 = (\omega^2 r_1 + \omega, \delta_3, \delta_2) \qquad (r_1 = \text{Max}(m, \delta l, \delta n),$$
$$\delta_2 = (\omega^2 r_2 + \omega, \alpha, \delta_4) \qquad (r_2 = \text{Max}(m, \delta l),$$
$$\delta_3 = (\omega^2 r + 1, 1, \alpha \dot{+} \gamma), \quad \delta_4 = (\omega^2 r + 1, 1, \alpha \dot{+} \beta).$$

Sie ist also kleiner geworden.

B 4) Es handele sich um das Schema U 7, also um das Schema

$$\frac{\Psi_1, \langle\mathfrak{A}_1\rangle \ldots \Psi_n, \langle\mathfrak{A}_n\rangle \quad \Theta, \langle\mathfrak{C}_1\rangle, \ldots, \langle\mathfrak{C}_m\rangle}{\Psi_1, \ldots, \Psi_n, \Theta, \mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_m}.$$

Wir unterscheiden folgende Fälle:

I. Θ, $\langle\mathfrak{C}_1\rangle$, ..., $\langle\mathfrak{C}_m\rangle$ sei Grundreihe, bestehe also aus einer einzigen Formel $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$; außerdem kann dann nur eine einzige andere Prämisse des U-Schemas von der Form Ψ, $\langle\mathfrak{A}\rangle$ vorhanden sein. Die Konklusion ist Ψ, $\mathfrak{B}$.

Bei der Veränderung der Herleitung müssen wir die einzelnen Grundreihen besonders behandeln. Die Nummer bei den folgenden Überlegungen zeigt jedesmal, um welche Grundreihe es sich handelt.

1) I 2a, I 2b, II 2, III 2a.

In diesen Fällen erhalten wir $\mathfrak{P}, \mathfrak{B}$ sofort aus $\mathfrak{P}, \langle \mathfrak{A} \rangle$ mit Hilfe von S-Schemata und N 1, N 11 oder N 7. Die Ordnungszahl von $\mathfrak{P}, \mathfrak{B}$ ist zuerst $(\omega^2 r + \omega, 1, \alpha)$ und hinterher $\alpha + n$. Der Rang von $\mathfrak{B}$ ist nicht größer als vorher.

2) $\mathfrak{A}$ habe die Form $\mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{D}$. Das betrifft die Grundreihen I 1a, I 1b, I 3, I 4, I 5, I 6, II 6, III 1, III 4a, III 5a. $\mathfrak{P}, \langle \mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{D} \rangle$ entsteht nach N 2 aus zwei Formelreihen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{C}, \mathfrak{P}_2, \langle \mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{D} \rangle$ und $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{D}, \mathfrak{P}_2, \langle \mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{D} \rangle$, die die Ordnungszahlen α und β haben. Sei r der maximale Rang der Formeln $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{P}, \langle \mathfrak{A} \rangle$. Die Ordnungszahl von $\mathfrak{P}, \mathfrak{B}$ ist bei der gegebenen Herleitung $(\omega^r k + \omega, 1, \alpha \dotplus \beta + 1)$. Hierbei ist $k = r$, bzw. im Falle der Grundreihen I 4, III 5a, I 6 $k = \mathrm{Max}(r, 2)$. Der Rang von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{P}, \mathfrak{B}$ ist k. Wir wenden nun auf jede der beiden Prämissen von $\mathfrak{P}, \langle \mathfrak{A} \rangle$ und die gleiche Grundreihe wieder U 7 an und erhalten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{C}, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{D}, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{B}$. Beide Formelreihen haben höchstens die Ordnungszahlen $(\omega^r k + \omega, 1, \alpha)$ und $(\omega^r k + \omega, 1, \beta)$, die wir zur Abkürzung mit δ_1 und δ_2 bezeichnen. Wir wollen diese Formelreihen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ nennen. Der Rang der Formeln $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ ist höchstens r, der von $\mathfrak{B}$ in beiden Reihen höchstens k. Weiter gehen wir verschieden vor, je nachdem um welche Grundreihen es sich handelt.

I 1a, I 1b. $\mathfrak{P}, \mathfrak{B}$ entsteht dann aus $\mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{G}$ durch S-Schemata. Die Ordnungszahl dieser Reihe ist also $\delta_1 + n$ bzw. $\delta_2 + n$.

I 3. $\mathfrak{A}$ hat die Form $\mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{D} \vee \mathfrak{E}$. Aus $\mathfrak{G}$, d. h. $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{D} \vee \mathfrak{E}, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{B}$ ergibt sich nach U 1 $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{B}$. Aus $\mathfrak{F}$, d. h. $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{C}, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{B}$ ergibt sich durch S-Schemata $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{D}, \mathfrak{C}, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{B}$, weiter nach N 2 $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{D}, \mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{E}, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{B}$, nach N 1 $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{D} \vee (\mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{E}), \mathfrak{P}_2, \mathfrak{B}$, daraus nach S 2 und S 3 $\mathfrak{P}, \mathfrak{B}$. Die Ordnungszahl der letzten Formel ist $(1, 1, \delta_2) \dotplus \delta_1 + n$. Der Rang von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{P}, \mathfrak{B}$ ist nicht größer als vorher.

I 4, I 5, I 6, II 6, III 4a.

Aus $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ erhalten wir $\mathfrak{P}, \mathfrak{B}$ durch N 4, N 5, N 3, U 2, N 9. Bei I 4 und I 6 müssen wir allerdings zunächst die Fälle ausschließen, daß $\mathfrak{A}$ die Form $(\Gamma \to \mathfrak{C}) \,\&\, (\Gamma \to \mathfrak{D})$ bzw. $(\Gamma \to \mathfrak{C}) \,\&\, (\mathfrak{C} \to \mathfrak{D})$ hat, da sonst die Schemata N 4 und N 3 nicht anwendbar sind. Die neue Ordnungszahl von $\mathfrak{P}, \mathfrak{B}$ ist $\delta_1 \dotplus \delta_2 + n$ bzw. $(1, 1, \delta_1 \dotplus \delta_2) + n$. Der Rang von $\mathfrak{B}$ ist nicht größer als vorher.

I 4. $\mathfrak{A}$ habe die Form $(\Gamma \to \mathfrak{C}) \,\&\, (\Gamma \to \mathfrak{D})$.

N 6 (N 2 (U 5 ($\mathfrak{F}$); U 5 ($\mathfrak{G}$))) und Anwendung von S-Schemata gibt den neuen Beweis für $\mathfrak{P}, \mathfrak{B}$, ohne daß sich der Rang von $\mathfrak{B}$ vergrößert hat. Die neue Ordnungszahl ist $(1, 1, \delta_1) \dotplus (1, 1, \delta_2) + n$.

I 6. $\mathfrak{A}$ habe die Form $(\Gamma \to \mathfrak{C}) \,\&\, (\mathfrak{C} \to \mathfrak{D})$.

N 6 (U 7 (U 5 ($\mathfrak{F}$); $\mathfrak{G}$)) und Anwendung von S-Schemata gibt den neuen Beweis für $\mathfrak{P}, \mathfrak{B}$. Die neue Ordnungszahl ist höchstens $(\omega^r \delta r + \omega, \delta_2,$

$(1, 1, \delta_1)) + n$, also kleiner als vorher, da $\delta r < \mathrm{Max}(r, 2)$. Der Rang von $\mathfrak{B}$ ist nicht größer geworden.

III 5 a.

N 10 (U 5 ($\mathfrak{F}$); $\mathfrak{G}$) und Anwendung von S-Schemata geben den neuen Beweis für Ψ, $\mathfrak{B}$. $(1, 1, \delta_1) \dot{+} \delta_2 + n$ ist die neue Ordnungszahl.

III 1.

U 6 ($\mathfrak{F}$; $\mathfrak{G}$) und Anwendung von S-Schemata. Ψ, $\mathfrak{B}$ hat die Ordnungszahl $(\omega^2 r + g, 1, \delta_1 \dot{+} \delta_2) + n$.

3) II 8 a.

N 15 (U 5 (Ψ, $\langle\mathfrak{A}\rangle$)) gibt die neue Herleitung. Die Ordnungszahl von $\mathfrak{B}$ ist zuerst $(\omega^2 r + \omega, 1, \alpha)$ und später $(1, 1, \alpha) + n$. Der Rang von $\mathfrak{B}$ ist nicht größer geworden, da mindestens eine der Formeln $\mathfrak{A}$ in Ψ, $\langle\mathfrak{A}\rangle$, nämlich diejenige, die Hauptformel der Konklusion eines N-Schemas ist, einen Rang > 1 hat.

4) In den übrigen Fällen, d. h. dem Vorliegen der Grundreihen I 7, I 8, I 9, II 1, II 3, II 4, II 5, II 7, II 8 b, III 2 b, III 3 a, III 3 b, III 4 b, III 5 b, III 6 a, III 6 b, III 7 a, III 7 b, III 8 a, III 8 b entsteht Ψ, $\langle\mathfrak{A}\rangle$ aus einer bzw. zwei Prämissen, die wir $\mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ nennen wollen und denen wir die Ordnungszahlen α und β zuschreiben, nach N 6, N 6, N 6, N 12, N 12, N 12, N 12, N 6, N 15, N 7, N 1, N 8, N 9, N 10, N 11, N 18, N 12, N 17, N 15, N 16. Sei r der maximale Grad der Formeln $\mathfrak{A}$ in Ψ, $\langle\mathfrak{A}\rangle$. k sei gleich r bzw. gleich $\mathrm{Max}(r, 2)$, falls es sich um II 3 handelt. Die Ordnungszahl von Ψ, $\mathfrak{B}$ ist $(\omega^2 k + \omega, 1, \alpha + 1)$ bzw. $(\omega^2 k + \omega, 1, \alpha \dot{+} \beta + 1)$. Der Rang von $\mathfrak{B}$ in Ψ, $\mathfrak{B}$ ist k. Bei der neuen Herleitung wenden wir zunächst U 7 auf jede der Formeln $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ und die gleiche Grundreihe an, entsprechend wie bei 2). Die entstandenen Reihen nennen wir $\mathfrak{F}_1$ bzw. $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{G}_1$. Ihre Ordnungszahlen sind höchstens $(\omega^2 k + \omega, 1, \alpha)$ bzw. $(\omega^2 k + \omega, 1, \alpha \dot{+} \beta)$, die wir mit δ_1 und δ_2 bezeichnen. Aus $\mathfrak{F}_1$ bzw. $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{G}_1$ erhalten wir nun Ψ, $\mathfrak{B}$ in der folgenden Weise, wobei wir zum Schluß angewandte S-Schemata nicht besonders erwähnen. I 7: N 6 ($\mathfrak{F}_1$). I 8: N 1 (N 6 (N 6 (U 1 ($\mathfrak{F}_1$)))). I 9: durch S-Schemata allein. II 1: durch Einsetzung in die Herleitung für $\mathfrak{F}_1$ gemäß Satz III von § 4. II 3: N 13 ($\mathfrak{F}_1$). Der Fall, daß $\mathfrak{A}$ die Form $(x)(\Gamma \to \mathfrak{C}(x))$ hat, muß unten besonders behandelt werden, da in diesem Falle N 13 nicht anwendbar ist. II 4: N 14 ($\mathfrak{F}_1$). II 5: N 1 (N 12 (U 1 ($\mathfrak{F}_1$))). II 7: U 4 ($\mathfrak{F}_1$). II 8 b: N 6. III 2 b: nur S-Schemata. III 3 a: N 8 ($\mathfrak{F}_1$). III 3 b: N 1 ($\mathfrak{F}_1$). III 4 b: N 2 ($\mathfrak{F}_1$; $\mathfrak{G}_1$). III 5 b: N 10 ($\mathfrak{F}_1$; $\mathfrak{G}_1$). III 6 a: N 18 ($\mathfrak{F}_1$). III 6 b: N 11 ($\mathfrak{F}_1$). III 7 a: N 17 ($\mathfrak{F}_1$). III 7 b: N 12 ($\mathfrak{F}_1$). III 8 a: N 16 ($\mathfrak{F}_1$). III 8 b: N 15 ($\mathfrak{F}_1$). — Die neue Ordnungszahl von Ψ, $\mathfrak{B}$ ist höchstens $\delta_1 + n$ bzw. $\delta_1 \dot{+} \delta_2 + n$, mit Ausnahme der Fälle I 8 und II 5. Hier ist sie $(1, 1, \delta_4) + n$, in jedem Falle aber kleiner als vorher. Ferner ist der Rang von $\mathfrak{B}$ in Ψ, $\mathfrak{B}$ nicht größer als vorher. In den Fällen nämlich, in denen bei der neuen Herleitung die den Rang einer Formel erhöhenden Schemata N 6, N 10 und U 4 gebraucht werden, war der Rang der betreffenden Formel in $\mathfrak{F}_1$ kleiner als r.

II 3. $\mathfrak{A}$ hat die Form $(x)(\Gamma \to \mathfrak{C}(x))$.

N 6 (N 12 (U 5 ($\mathfrak{F}_1$))) und Anwendung von S-Schemata geben die neue Herleitung für $\Psi, \mathfrak{B}$. Die Ordnungszahl der letzten Formel ist $(1, 1, \delta_1) + n$. Der Rang von $\mathfrak{B}$ ist $\delta\, r + 1$, also $\leqq k$, da in diesem Falle $k = \mathrm{Max}(r, 2)$.

II. Bei dem Schema U 7 entstehe die Prämisse $\Theta, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathfrak{C}_n \rangle$ durch ein N-Schema. In Frage kommen nur die Schemata N 3, N 4, N 5, N 6, N 13 und N 14. Wir wollen die Prämissen von $\Theta, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathfrak{C}_n \rangle$ $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{F}$ nennen. Sie mögen die Ordnungszahlen β und γ bzw. β haben. Die Reihen $\Psi_1, \langle \mathfrak{A}_1 \rangle \ldots \Psi_n, \langle \mathfrak{A}_n \rangle$ haben die Ordnungszahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Die Ordnungszahl von $\mathfrak{H}$, d. h. $\Psi_1, \ldots, \Psi_n, \Theta, \mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_m$ ist

$$(\omega^2 r + \omega, \beta \dotplus \gamma + 1, \alpha_1 \dotplus \cdots \dotplus \alpha_n) \quad \text{bzw.} \quad (\omega^2 r + \omega, \beta + 1, \alpha_1 \dotplus \cdots + \alpha_n),$$

wenn r der maximale Rang der Formeln $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_m$ ist.

N 3. $\mathfrak{F}$ ist $\Theta_1, \mathfrak{A}_j \to \mathfrak{E}, \Theta_2, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle$ und $\mathfrak{G}$ ist $\Theta_1, \mathfrak{E} \to \mathfrak{D}_k, \Theta_2, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle$. Aus $\mathfrak{F}$ und den Reihen $\Psi_1, \langle \mathfrak{A}_1 \rangle \ldots \Psi_n, \langle \mathfrak{A}_n \rangle$ erhalten wir nach U 7 $\Psi_1, \ldots, \Psi_n, \Theta, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_m$ und aus dieser Formelreihe, $\Psi_1, \langle \mathfrak{A}_1 \rangle \ldots \Psi_n, \langle \mathfrak{A}_n \rangle$ und $\mathfrak{G}$ nach U 7 eine Formelreihe, aus der sich $\mathfrak{H}$ durch S-Schemata ergibt. Die neue Ordnungszahl von $\mathfrak{H}$ ist höchstens

$$(\omega^2 r + \omega, \gamma, \alpha_1 \dotplus \cdots \dotplus \alpha_n \dotplus (\omega^2 r + \omega, \beta, \alpha_1 \dotplus \cdots \dotplus \alpha_n)) + n,$$

also kleiner als vorher.

N 4. $\mathfrak{F}$ ist $\Theta_1, \mathfrak{A}_j \to \mathfrak{E}, \Theta_2, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle$ und $\mathfrak{G}$ ist $\Theta_1, \mathfrak{A}_j \to \mathfrak{K}, \Theta_2, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle$. $\mathfrak{E} \& \mathfrak{K}$ ist mit einem der $\mathfrak{D}_i$ identisch. Aus $\Psi_1 \langle \mathfrak{A}_1 \rangle \ldots \Psi_n, \langle \mathfrak{A}_n \rangle$ und je einer der beiden Formelreihen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ erhalten wir nach U 7 $\Psi_1, \Psi_n, \Theta, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_m$ und $\Psi_1, \ldots, \Psi_n, \Theta, \mathfrak{K}, \mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_m$, aus den letzten beiden Formeln durch N 2 und S-Schemata wieder $\mathfrak{H}$. Die Ordnungszahl von $\mathfrak{H}$ ist jetzt höchstens

$$(\omega^2 r + \omega, \beta, \alpha_1 \dotplus \cdots \dotplus \alpha_n) \dotplus (\omega^2 r + \omega, \gamma, \alpha_1 \dotplus \cdots \dotplus \alpha_n) + n.$$

N 5. $\mathfrak{F}$ ist $\Theta_1, \mathfrak{E} \to \mathfrak{D}_i, \Theta_2, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle$ und $\mathfrak{G}$ ist $\Theta_1, \mathfrak{K} \to \mathfrak{D}_i, \Theta_2, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle$, wobei $\mathfrak{E} \vee \mathfrak{K}$ mit einem $\mathfrak{A}_j$ identisch ist. Wir erhalten zunächst aus $\Psi_j, \langle \mathfrak{A}_j \rangle$ nach U 1 $\Psi_j, \mathfrak{E}, \mathfrak{K}$, weiter aus $\Psi_1, \langle \mathfrak{A} \rangle \ldots \Psi_n, \langle \mathfrak{A}_n \rangle$ und $\Psi_j, \mathfrak{E}, \mathfrak{K}$ und $\mathfrak{F}$ nach U 7 $\Psi_1, \ldots, \Psi_n, \mathfrak{K}, \Theta, \mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_m$, aus der letzten Formel, $\Psi_1, \langle \mathfrak{A}_1 \rangle \ldots \Psi_n, \langle \mathfrak{A}_n \rangle$ und $\mathfrak{G}$ nach U 7 und weiteren Gebrauch von S-Schemata $\mathfrak{H}$. Die Ordnungszahl von $\mathfrak{H}$ ist jetzt höchstens

$$(\omega^2 r + \omega, \gamma, \alpha_1 \dotplus \cdots \dotplus \alpha_n \dotplus (\omega^2 r + \omega, \beta, \alpha_1 \dotplus \cdots \dotplus \alpha_n \dotplus (1, 1, \alpha_j))) + n.$$

N 6. $\mathfrak{F}$ ist $\Theta_1, \mathfrak{D}_i, \Theta_2, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle$. Aus $\Psi_1, \langle \mathfrak{A}_1 \rangle, \ldots, \Psi_n, \langle \mathfrak{A}_n \rangle$ und $\mathfrak{F}$ ergibt sich nach U 7 und S-Schemata $\mathfrak{H}$. Die Ordnungszahl der letzten Reihe ist $(\omega^2 r + \omega, \beta, \alpha_1 \dotplus \cdots \dotplus \alpha_n) + n$.

N 13. $\mathfrak{F}$ hat die Form $\Theta_1, \mathfrak{A}_j \to \mathfrak{K}(a), \Theta_2, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle$. Aus

$$\Psi_1, \langle \mathfrak{A}_1 \rangle, \ldots, \Psi_n, \langle \mathfrak{A}_n \rangle$$

und $\mathfrak{F}$ ergibt sich nach U 7 $\Psi_1, \ldots, \Psi_n, \Theta, \mathfrak{K}(a), \mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_m$, weiter nach N 12 und S-Schemata $\mathfrak{H}$. Die Ordnungszahl ist

$$(\omega^2 r + \omega, \beta, \alpha_1 \dotplus \cdots \dotplus \alpha_n) + n.$$

N 14. $\mathfrak{F}$ ist $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{G}(a) \to \mathfrak{D}_i, \mathfrak{O}_2, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle$. Hierbei ist $(E\,x)\mathfrak{G}(x)$ gleich einem $\mathfrak{A}_j$. $\mathfrak{P}_j, \langle \mathfrak{A}_j \rangle$ entsteht aus $\mathfrak{P}_{j_1}, \mathfrak{G}(\mathfrak{a}), \mathfrak{P}_{j_2}, \langle \mathfrak{A}_j \rangle$ nach N 11. Aus der letzten Formel, $\mathfrak{P}_1, \langle \mathfrak{A}_1 \rangle \ldots \mathfrak{P}_n, \langle \mathfrak{A}_n \rangle$ (ohne $\mathfrak{P}_j, \langle \mathfrak{A}_j \rangle$) und $\mathfrak{O}, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle$ erhalten wir nach U 7 $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n, \mathfrak{P}_{j_1}, \mathfrak{G}(\mathfrak{a}), \mathfrak{P}_{j_2}, \mathfrak{O}, \mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_m$. Nach Satz III von § 4 gibt es eine Herleitung für $\mathfrak{F}_1$, d. h. $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{G}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{D}_i, \mathfrak{O}_2, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle$, so daß diese Formelreihe keine größere Ordnungszahl als $\mathfrak{F}$ und keine Formel in ihr einen größeren Rang als die entsprechende in $\mathfrak{F}$ hat. Aus $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n, \mathfrak{P}_{j_1}, \mathfrak{G}(\mathfrak{a}), \mathfrak{P}_{j_2}, \mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_m$ und $\mathfrak{P}_1, \langle \mathfrak{A}_1 \rangle \ldots \mathfrak{P}_n, \langle \mathfrak{A}_n \rangle$ und $\mathfrak{F}_1$ erhalten wir nach U 7 eine Reihe, aus der sich $\mathfrak{H}$ durch S-Schemata ergibt. Die Ordnungszahl von $\mathfrak{H}$ ist jetzt

$$(\omega^2 r + \omega, \beta, \alpha_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \alpha_n \dot{+} (\omega^2 r + \omega, \beta + 1, \alpha_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \alpha_{j-1} \dot{+} \alpha_j' \dot{+} \alpha_{j+1} \dot{+} \cdots \dot{+} \alpha_n)) + n,$$

wobei $\alpha_j' + 1 = \alpha_j$.

Damit haben wir nun allgemein gezeigt, daß man jede Herleitung, bei der die Endreihe keine freie Variable enthält und bei der eine Formelreihe des Endstücks durch ein U-Schema zustande kommt, in eine andere mit der gleichen Endreihe, aber kleinerer Ordnungszahl verwandeln kann. Durch Fortsetzung des Verfahrens gelangt man also zu einer Herleitung, bei der keine Formelreihe des Endstücks mehr durch ein U-Schema entsteht. Zum Beweise der Widerspruchsfreiheit bleibt zu zeigen, daß $\overline{\Gamma}$ nicht Endreihe einer derartigen Herleitung sein kann. Wir wollen allgemeiner zeigen, daß eine Reihe $\overline{\Gamma}, \ldots, \overline{\Gamma}$ nicht Endreihe sein kann. Eine derartige Reihe ist nämlich keine Grundreihe. Ferner kann keine ihrer Formeln Hauptformel der Konklusion eines N-Schemas sein. Gehört also eine solche Reihe zum Endstück, so muß sie nach S 1, S 2 oder S 3 aus einer Formel der gleichen Art zustande kommen, d. h. es müßte eine „oberste" Formel des Endstücks von dieser Gestalt geben. Da aber die obersten Formelreihen des Endstücks, soweit sie nicht Grundreihen sind, nach N 12, N 13, N 14 oder N 17 zustande kommen, kann überhaupt im Endstück keine Formelreihe $\overline{\Gamma}, \overline{\Gamma}, \ldots, \overline{\Gamma}$ auftreten. Damit ist die Widerspruchsfreiheit des Systems von § 3 und damit auch die des Systems von § 2 gezeigt.

Die Herleitung der Mathematik aus dem in § 2 aufgestellten System wird in einer sich anschließenden Abhandlung erfolgen.

(Eingegangen am 29. Januar 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 3, S. 385–398 (1952).

On Meijer Transform.

By

J. P. Jaiswal in Lucknow (India).

1. MEIJER (1941) introduced the transform

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2},m}(st)(st)^{-k-\frac{1}{2}} f(t)\,dt \tag{1}$$

and its inverse

$$f(t) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\Gamma(1-k+m)}{2\pi i\,\Gamma(1+2m)} \int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} e^{\frac{1}{2}st} M_{k-\frac{1}{2},m}(ts)(ts)^{k-\frac{1}{2}} F(s)\,ds \tag{2}$$

where $M_{k,m}(z)$ and $W_{k,m}(z)$ are the two WHITTAKER functions.

We will denote (1) symbolically as

$$f(t) \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} \Phi(s) \tag{3}$$

where $\Phi(s) = sF(s)$.

For $k = \pm m$, (1) reduces to LAPLACE transform, due to the identity

$$e^{-\frac{1}{2}st} \equiv (st)^{-m-\frac{1}{2}} W_{m+\frac{1}{2},m}(st)$$

i. e.,

$$\Phi(s) = s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

which is symbolically denoted as

$$\Phi(s) \fallingdotseq f(t).$$

As in the case of LAPLACE transform, we will call $\Phi(s)$ the *image* of $f(t)$, $f(t)$ the *original* of $\Phi(s)$ and the transform to be *MEIJER transform*.

In this paper, we have given in section I, some of the rules of MEIJER transform, which are similar to those of LAPLACE transform. Also we have derived the MEIJER transforms of some of the known functions, which have later been used in illustrating the theorems given subsequently in sections II, III, IV.

Since MEIJER transform is a generalization of LAPLACE transform it must possess some properties, the analogues of which do not exist in the case of the LAPLACE transform. The theorems established disclose this fact. The theorems given in section III help us in evaluating certain integrals. The properties of WHITTAKER function have been utilised in deriving the properties of the MEIJER transform.

I.

2. Some of the rules of MEIJER transform are enumerated below:

1) If

$$f(t) \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} \Phi(s),$$

then

(i) $$f(at) \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} \Phi\left(\frac{s}{a}\right) \qquad \text{(R. 1.)}$$

(ii) $$\left(t\,\frac{d}{dt}\right)^n \{f(t)\} \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} \left(-s\,\frac{d}{ds}\right)^n \{\Phi(s)\} \qquad \text{(R. 2.)}$$

(iii) $$\int_0^t f(t)\,\frac{dt}{t} \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} \int_s^\infty \Phi(s)\,\frac{ds}{s} \qquad \text{(R. 3.)}$$

(iv) $$\int_0^\infty f(t)\,\frac{dt}{t} \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} \int_0^\infty \Phi(s)\,\frac{ds}{s} \qquad \text{(R. 4.)}$$

(v) $$\int_t^\infty f(t)\,\frac{dt}{t} \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} \int_0^s \Phi(s)\,\frac{ds}{s} \qquad \text{(R. 5.).}$$

2) If

$$f(t) \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} \Phi(s),$$

then [1])

$$\int_0^\infty \Phi(s)\,\frac{ds}{s} = \frac{\Gamma_*(1-k\pm m)}{\Gamma(1-2k)} \int_0^\infty f(t)\,\frac{dt}{t} \qquad \text{(R. 6.)}$$

provided $\Re(1-k\pm m)>0$.

3) If

$$f_1(t) \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} \Phi_1(s),$$

and

$$f_2(t) \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} \Phi_2(s),$$

then

$$\int_0^\infty \Phi_1(u)\,f_2(u)\,\frac{du}{u} = \int_0^\infty f_1(v)\,\Phi_2(v)\,\frac{dv}{v} \qquad \text{(R. 7.)}$$

provided the integrals are absolutely convergent and the change in the order of integration is justified.

4) If

$$f_r(t) \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} \Phi_r(s),$$

then

$$\sum_{r=1}^n f_r(t) \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} \sum_{r=1}^n \Phi_r(s) \qquad \text{(R. 8.)}$$

---

[1]) The symbol

$$\Gamma_*(\alpha\pm\beta) \text{ denotes } \Gamma(\alpha+\beta)\cdot\Gamma(\alpha-\beta).$$

provided $\Re(\mu - k + 1 \pm m) > 0$ where $f_r(t) = O(t^\mu)$ for small t. (R. 8.) also holds for $n \to \infty$, provided

(i) $\sum_{r=1}^{\infty} f_r(t)$ is uniformly and absolutely convergent for $t \geqq 0$.

(ii) the integral is uniformly and absolutely convergent for

$$\Re(\mu - k + 1 \pm m) > 0,$$

where

$$f_r(t) = O(t^\mu) \text{ for small } t,$$

and

$$e^{-\frac{1}{2}s_0 t}(s_0 t)^{-k-\frac{1}{2}} W_{k+\frac{1}{2},m}(s_0 t) f(t)$$

is bounded for $\Re(s) > s_0 > 0$; and

(iii) $\sum_{r=1}^{\infty} \Phi_r(s)$ is uniformly convergent.

The proofs of these rules can be developed on the same lines as given by Bose [1] in the case of Whittaker transform.

3. We now obtain the Meijer transform of some of the known functions as follows:

a) If

$$f(t) = t^n,$$

then

$$\Phi(s) = s \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2},m}(st)(st)^{-k-\frac{1}{2}} t^n \, dt.$$

Now using the integral [2]) [3, p. 114]

$$(A) \quad \int_0^\infty x^{l-1} e^{-(\alpha^2+\frac{1}{2})x} W_{k,m}(x)\, dx = \frac{\Gamma_*(l+\frac{1}{2}\pm m)}{\Gamma(l+1-k)} {}_2F_1\left[\begin{matrix} l+\frac{1}{2}\pm m \\ l-k+1 \end{matrix}, -\alpha^2\right]$$

$$l + \tfrac{1}{2} \pm m > 0, \quad \Re(\alpha^2 + 1) > 0, \text{ and } |\alpha| < 1.$$

And putting $\alpha^2 = 0$, we get

$$(4) \qquad \Phi(s) = \frac{\Gamma_*(n-k+1\pm m)}{\Gamma(n-2k+1)} s^{-n} \quad \Re(n-k+1\pm m) > 0 \quad \Re(s) > 0.$$

If $k = m$ then (4) reduces to Laplace Transform [4, p. 14]

$$\Phi(s) = \Gamma(n+1)\, s^{-n-1} \quad \Re(n+1) > 0 \text{ and } \Re(s) > 0.$$

b) If

$$f(t) = t^\nu e^{-\alpha t},$$

then

$$\Phi(s) = s \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2},m}(st)(st)^{-k-\frac{1}{2}} t^\nu e^{-\alpha t} dt.$$

---

[2]) The symbol

$${}_rF_1\left[\begin{matrix} \alpha \pm \beta \\ \gamma \end{matrix}; x\right] \text{ denotes } {}_2F_1\left[\begin{matrix} \alpha+\beta, \alpha-\beta \\ \gamma \end{matrix}; x\right].$$

Evaluating the above integral by (A) with $\alpha^2 = a/s$, we get

$$\Phi(s) = \frac{1}{s^\nu} \frac{\Gamma_*(\nu - k \pm m + 1)}{\Gamma(\nu - 2k + 1)} {}_2F_1\left[\begin{matrix}\nu - k + 1 \pm m \\ \nu - 2k + 1\end{matrix}; -\frac{a}{s}\right] \tag{5}$$

$$\Re(\nu - k + 1 \pm m) > 0, \quad \Re(s + a) > 0, \text{ and } |s| > |a|.$$

If we put $k = m$ in (5), then [4, p. 16]

$$\Phi(s) = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{(a + s)^{\nu + 1}} \quad \Re(\nu + 1) > 0 \text{ and } \Re(s + a) > 0.$$

c) If

$$f(t) = t^\lambda e^{-\frac{1}{2}t^2},$$

then

$$\Phi(s) = s \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2}, m}(st)(st)^{-k-\frac{1}{2}} t^\lambda e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

writing the two infinite series for WHITTAKER function,

$$W_{k+\frac{1}{2}, m}(x) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(-m-k)} x^{m+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} {}_1F_1\left[\begin{matrix}m - k \\ 2m + 1\end{matrix}; x\right]$$

$$+ \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m-k)} x^{-m+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} {}_1F_1\left[\begin{matrix}-m-k \\ 1-2m\end{matrix}; x\right]$$

provided $2m$ is not an integer, and integrating term by term, which is justified since

(i) each infinite series is uniformly convergent in an arbitrary interval,

(ii) the two infinite integrals are absolutely and uniformly convergent when $\Re(\lambda - k + 1 \pm m) > 0$ and $\Re(s) > 0$, on account of the behaviour

$$W_{k+\frac{1}{2}, m}(x) = O(x^{\frac{1}{2} \pm m}) \text{ for small } x$$

$$= O(x^{k+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}) \text{ for large } x$$

and (iii) the resulting series is absolutely convergent; we get from WHITTAKERS's Integral [6] for WEBER's parabolic cylinder function

$$D_{-n}(z) = \frac{e^{-\frac{1}{4}z^2}}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-tz - \frac{1}{2}t^2} t^{n-1} dt; \quad \Re(n) > 0 \tag{B}$$

$$\Phi(s) = \frac{\Gamma(-2m)\,\Gamma(2m+1)}{\Gamma_*(-k \pm m)} e^{\frac{1}{4}s^2} s^{m-k+1} \times$$

$$\times \sum_{r=0}^\infty \frac{s^r}{r!} \frac{\Gamma(m-k+r)\,\Gamma(\lambda-k+m+r+1)}{\Gamma(2m+r+1)} D_{-(\lambda-k+m+r+1)}(s).$$

(6) + (a series obtained by replacing m by $-m$ in the above),

provided $2m$ is not an integer and $\Re(\lambda - k + 1 \pm m) > 0$.

On putting $k = m$ in (6) we get [4, p. 12]

$$\Phi(s) = \Gamma(\lambda + 1)\, s\, e^{\frac{1}{4}s^2} D_{-(\lambda+1)}(s) \qquad \Re(\lambda + 1) > 0.$$

d) If

$$f(t) = t^{n/2}\, J_n(2\sqrt{t}),$$

then

$$\Phi(s) = s \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st}\, W_{k+\frac{1}{2},m}(st)\,(st)^{-k-\frac{1}{2}}\, t^{n/2}\, J_n(2\sqrt{t})\, dt.$$

Expanding $J_n(2\sqrt{t})$ in an infinite series and changing the order of integration and summation which is permissible and integrating by the help of (A) with $\alpha' = 0$, we get

$$\Phi(s) = \frac{\Gamma_*(n-k+1\pm m)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n-2k+1)}\, s^{-n}\, {}_2F_2\left[\begin{matrix} n-k+1\pm m \\ n+1,\ n-2k+1 \end{matrix};\ \frac{-1}{s}\right] \tag{7}$$

$$\Re(n-k+1\pm m) > 0 \text{ and } \Re(s) > 0,$$

when $k = m$ (7) reduces to [4, p. 28]

$$\Phi(s) = \frac{1}{s^n}\, e^{-\frac{1}{s}}; \quad \Re(n+1) > 0 \text{ and } \Re(s) > 0.$$

e) If

$$f(t) = t^\mu\, J_\nu(at),$$

then

$$\Phi(s) = s \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st}\, W_{k+\frac{1}{2},m}(st)\,(st)^{-k-\frac{1}{2}}\, t^\mu\, J_\nu(at)\, dt.$$

Expanding J_ν and using (A) with $\alpha' = 0$, we get

$$\Phi(s) = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^\nu \Gamma_*(\mu+\nu-k+1\pm m)}{s^{\mu+\nu}\,\Gamma(\mu+\nu-2k+1)\,\Gamma(\nu+1)} \times$$

$$(8)\qquad {}_4F_3\left[\begin{matrix} \frac{\mu+\nu-k+1\pm m}{2}, & \frac{\mu+\nu-k+2\mp m}{2} \\ \nu+1, & \frac{\mu+\nu-2k+1}{2}, \quad \frac{\mu+\nu-2k+2}{2} \end{matrix};\ -\frac{a^2}{s^2}\right]$$

$$\Re(\mu+\nu+1-k\pm m) > 0, \quad \Re(s) > 0 \text{ and } |s| > |a|.$$

When $k = m$, (8) reduces to [4, p. 28]

$$\Phi(s) = \frac{\Gamma(\mu+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{a}{2}\right)^\nu \frac{1}{s^{\mu+\nu}}\, {}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{\mu+\nu+1}{2}, & \frac{\mu+\nu+2}{2} \\ \nu+1 \end{matrix};\ -\frac{a^2}{s^2}\right]$$

$$\Re(\mu+\nu+1) > 0, \quad \Re(s) > 0 \text{ and } |s| > |a|.$$

f) If

$$f(t) = e^{-bt}\, t^\mu\, J_\nu(at),$$

then

$$\Phi(s) = s \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st}\, W_{k+\frac{1}{2},m}(st)\,(st)^{-k-\frac{1}{2}}\, e^{-bt}\, t^\mu\, J_\nu(at)\, dt.$$

Expanding J_r and integrating by (A) with $\alpha^2 = \frac{b}{s}$, we get[3]

$$(9)\quad \Phi(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r \left(\frac{a}{2}\right)^{\nu+2r} s^{-(\mu+\nu+2r)} \Gamma_*(\mu+\nu-k+2r+1\pm m)}{r!\,\Gamma(\nu+r+1)\,\Gamma(\mu+\nu-2k+2r+1)} \times$$
$$\times {}_2F_1\left[\begin{matrix}\mu+\nu+2r-k+1\pm m \\ \mu+\nu+2r-2k+1\end{matrix};\ -\frac{b}{s}\right]$$
$$\Re(\mu+\nu-k+1\pm m)>0,\quad \Re(s+b)>0 \text{ and } |s+b|>|a|.$$

When $k = m$, (9) reduces to

$$\Phi(s) = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{\nu}\Gamma(\nu+\mu+1)s}{\Gamma(\nu+1)(b+s)^{\mu+\nu+1}}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{\mu+\nu+1}{2},\ \frac{\mu+\nu+2}{2} \\ \nu+1\end{matrix};\ -\left(\frac{a}{b+s}\right)^2\right]$$
$$\Re(\mu+\nu+1)>0,\quad \Re(b+s)>0 \text{ and } |s+b|>|a|.$$

4. A few applications of the rules of the MEIJER transform are illustrated below:

a) If

$$f_r(t) = \frac{(-)^{r+l}\,t^{r+n}}{(l-r)!\,r!\,\Gamma(n+r+1)},$$

then from equation (4) we have

$$\Phi_r(s) = \frac{(-)^{r+l}\,\Gamma_*(n+r-k+1\pm m)}{(l-r)!\,r!\,\Gamma(n+1+r)\,\Gamma(n+r-2k+1)}\ \frac{1}{s^{n+r}}.$$

Now applying (R. 8) we obtain the image of $t^n\,T_n^l(t)$ as

$$(10)\quad \Phi(s) = \frac{(-)^{l+1}}{s^{n+1}}\ \frac{\Gamma_*(n-k+2\pm m)}{(l-1)!\,\Gamma(n+2)\,\Gamma(n-2k+2)}\ {}_4F_3\left[\begin{matrix}1,\ 1-l,\ n-k+2\pm m \\ 2,\ n+2,\ n-2k+2\end{matrix};\ \frac{1}{s}\right]$$
$$\Re(n+2)>0 \text{ and } \Re(s)>0.$$

Again, if we multiply (10) by $(-)^l\,\Gamma(l+n+1)$, we get the image of $t^n\,L_l^n(t)$, where $T_n^l(t)$ and $L_l^n(t)$ are respectively *polynome de* SONINE and *polynome de* LAGUERRE *étendu*.

Putting $k = m$ in (10), we get

$$\frac{(1-s)^l}{l!\,s^{n+l}} \doteqdot t^n\,T_n^l(t) \qquad \Re(n+2)>0,\quad \Re(s)>0.$$

b) If

$$f(t) = C(t),$$

where

$$C(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt$$

---

[3] The convergence of the series follows from the inequality

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a+2r,\ b+2r \\ c+2r\end{matrix};\ x\right] < \frac{(c)_{2r}}{(A)_{2r}}\,(1-x)^{-2r}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\ b \\ c\end{matrix};\ x\right]$$

where

$$(c)_r = \frac{\Gamma(c+r)}{\Gamma(c)} \qquad \text{and } A = \min(a, b, c).$$

and is known as *intégrale de* FRESNEL, then using (8) with

$$\mu = 1, \quad \nu = -\frac{1}{2}, \text{ and } a = 1;$$

and applying (R. 3), we get

$$(11) \qquad \Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2s}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r \Gamma_*\left(\frac{3}{2} - k + 2r \pm m\right)(2s)^{-2r}}{r!\,\Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2r - 2k + \frac{3}{2}\right)\left(2r + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\Re\left(\tfrac{3}{2} - k \pm m\right) > 0, \quad \Re(s) > 0 \text{ and } |s| > 1.$$

On putting $k = m$, (11) reduces to [4, p. 26]

$$\tfrac{1}{2}(s^2+1)^{-\frac{1}{2}}\left[\sqrt{(s^2+1)} - s\right]^{-\frac{1}{2}} \doteqdot C(t) \qquad \Re(s) > 0.$$

Also when $k = \frac{1}{2}$, (11) reduces to

$$\Phi(s) = \frac{\sqrt{2}\ \Gamma_*(1 \pm m)}{\pi\sqrt{s}}\, {}_4F_3\left[\begin{matrix} \frac{1}{2} \pm \frac{m}{2}, & 1 \pm \frac{m}{2} \\ \frac{1}{2}, & \frac{3}{4}, & \frac{5}{4} \end{matrix}; \quad -\frac{1}{s^2}\right]$$

$$\Re(1 \pm m) > 0, \quad \Re(s) > 0 \text{ and } |s| > 1.$$

(c) If

$$f(t) = \sin t,$$

then from equation (8) with

$$\mu = \tfrac{1}{2}, \quad \nu = \tfrac{1}{2}, \quad \text{and } a = 1;$$

and on applying (R. 2) with $n = 1$, we get on simplifying

$$(12) \quad t\cos t \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma_*(2 - k \pm m)}{s\,\Gamma(2-2k)}\, {}_4F_3\left[\begin{matrix} \frac{2-k\pm m}{2}, & \frac{3-k\pm m}{2} \\ \frac{1}{2}, & 1-k, & \frac{3}{2}-k \end{matrix}; \quad -\frac{1}{s^2}\right]$$

$$\Re(2 - k \pm m) > 0, \quad \Re(s) > 0 \text{ and } |s| > 1,$$

when $k = m$, (12) reduces to [4, p. 20]

$$\frac{s(s^2-1)}{(1+s^2)^2} \doteqdot t\cos t, \qquad \Re(s) > 0.$$

II.

5. Theorem 1. *If*

$$t^r f(t) \xrightarrow[m]{m+r+\frac{1}{2}} \Phi_{r+m+\frac{1}{2}}(s)$$

and

$$\psi_{r_1}(s) \doteqdot t^{r_1} f(t),$$

then

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-s)^r}{r!\,\Gamma(2m+r+1)}\, \Phi_{r+m+\frac{1}{2}}(s) = e \sum_{r_1=0}^{\infty} \frac{(-s)^{r_1}}{r_1!\,\Gamma(2m+r_1+1)}\, \Psi_{r_1}(s)$$

provided $\Re(\lambda+1)>0$, $\Re(\lambda+1-2m)>0$, *where* $f(t)=O(t^{\lambda})$ *for small* t, $e^{-s_0 t}\, t^{-m} J_{2m}(2\sqrt{s_0 t})\, f(t)$ *tends to zero as* $t \to \infty$ *for* $\Re(s)>s_0>0$, *and* $f(t)$ *is continuous for* $t>0$.

Proof. We know [3, p. 120]

$$\text{(C)} \qquad e\, t^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}t} J_{2m}(2t^{\frac{1}{2}}) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r}{r!\,\Gamma(2m+r+1)}\, W_{r+m+\frac{1}{2},m}(t).$$

Also

$$\text{(13)} \qquad \Phi_{r+m+\frac{1}{2}}(s) = s \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}st} (st)^{-r-m-\frac{1}{2}}\, W_{r+m+\frac{1}{2},m}(st)\, t^r f(t)\, dt.$$

On multiplying both sides by $\frac{(-)^r s^r}{r!\,\Gamma(2m+r+1)}$ and taking the sum from zero to infinity, we have

$$\text{(14)} \qquad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r s^r}{r!\,\Gamma(2m+r+1)}\, \Phi_{r+m+\frac{1}{2}}(s)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r s}{r!\,\Gamma(2m+r+1)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}st} (st)^{-m-\frac{1}{2}}\, W_{r+m+\frac{1}{2},m}(st)\, f(t)\, dt$$

$$\text{(15)} \qquad = es \int_0^{\infty} e^{-st} (st)^{-m} J_{2m}(2\sqrt{st})\, f(t)\, dt$$

from (C).

On expanding $J_{2m}(2\sqrt{st})$, changing the order of integration and summation and interpreting term by term, we obtain

$$\text{(16)} \qquad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r s^r}{r!\,\Gamma(2m+r+1)}\, \Phi_{r+m+\frac{1}{2}}(s) = e \sum_{r_1=0}^{\infty} \frac{(-)^{r_1} s^{r_1}}{r_1!\,\Gamma(2m+r_1+1)}\, \Psi_{r_1}(s)$$

where

$$\Psi_{r_1}(s) = t^{r_1} f(t).$$

In order to justify the change of order in (2), we see that

(i) The series in (C) is uniformly convergent in any interval $0 \leqq t \leqq c$, c being arbitrary;

(ii) $f(t)$ is continuous for all $t>0$, and

(iii) $\int_0^{\infty} e^{-st} |(st)^{-m} J_{2m}(2\sqrt{st})\, f(t)|\, dt$ is convergent, if $R(\lambda+1)>0$,

where $f(t)=O(t^{\lambda})$ for small t, and

$$e^{-\frac{1}{2}s_0 t} (s_0 t)^{-m} J_{2m}(2\sqrt{s_0 t})\, f(t)$$

tends to zero as t tends to infinity for $\Re(s_0)>0$.

The second change in order in (16) is justified in the same way.

Example 1. If

$$f(t) = t^{\nu} e^{-at},$$

then (from 3. (b))

$$(17)\quad \Phi_{r+m+\frac{1}{2}}(s) = \frac{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\nu-2m+1)}{\Gamma(\nu-r-2m+1)\,s^{\nu+r}}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\nu+1,\ \nu-2m+1\\ \nu-r-2m+1\end{matrix};\ -\frac{a}{s}\right]$$

provided $\Re(\nu+1)>0$, $\Re(\nu-2m+1)>0$, $\Re(a+s)>0$, and $|s|>|a|$.

Now, [4, p. 16],

$$\Psi_{r_1}(s) = \frac{s\,\Gamma(\nu+r_1+1)}{(a+s)^{\nu+r_1+1}};\quad \Re(\nu+1)>0 \text{ and } \Re(a+s)>0.$$

Hence by Theorem 1, we have

$$(18)\quad \Gamma(2m+1)\,\Gamma(1+\nu-2m)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-)^r}{r!\,\Gamma(2m+r+1)\,\Gamma(\nu-r-2m+1)}$$

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}\nu+1,\ \nu-2m+1\\ \nu-r-2m+1\end{matrix};\ -\frac{a}{s}\right] = \frac{e}{s}\left(\frac{s}{s+a}\right)^{\nu+1}{}_1F_1\left[\begin{matrix}\nu+1\\ 2m+1\end{matrix};\ \frac{-s}{a+s}\right]$$

provided $\Re(\nu+1)>0$, $\Re(\nu-2m+1)>0$, $\Re(s+a)>0$, and $|s|>|a|$.

III.

6. Theorem 2. *If*

$$f(t) \xrightarrow{m}{}_{n+m+\frac{1}{2}} \Phi(s),$$

n being a positive integer, then

$$(19)\quad \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}st}\,t^{-n-m-\frac{1}{2}}\,M_{n+m+\frac{1}{2},m}(st)\,f(t)\,dt = \frac{(-)^n\,\Gamma(2m+1)}{\Gamma(2m+n+1)}\,s^{n+m-\frac{1}{2}}\,\Phi(s)$$

provided $\Re(a-n+1)>0$ where $f(t)=O(t^{\mu})$ for small t, and

$$t^{-n-m-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{s_0 t}{2}}\,M_{n+m+\frac{1}{2},m}(s_0 t)\,f(t)$$

tends to zero as t tends to infinity for $\Re(s)>s_0>0$.

Proof. We have

$$(20)\quad \Phi(s) = s\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}st}\,(st)^{-n-m-\frac{1}{2}}\,W_{n+m+\frac{1}{2},m}(st)\,f(t)\,dt.$$

Also, Erdelyi [2] has given

$$n!\,t^{m+\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}t}\,L_n^{(2m)}(t) = \frac{\Gamma(n+2m+1)}{\Gamma(2m+1)}\,M_{n+m+\frac{1}{2},m}(t),$$

which may be written as

$$(D)\quad W_{n+m+\frac{1}{2},m}(st) = \frac{(-)^n\,\Gamma(2m+n+1)}{\Gamma(2m+1)}\,M_{n+m+\frac{1}{2},m}(st).$$

Using (D) in (20) we obtain

$$(21)\quad \Phi(s) = \frac{(-)^n \Gamma(2m+n+1)}{\Gamma(2m+1)} s^{-(n+m-\frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st} t^{-n-m-\frac{1}{2}} M_{m+n+\frac{1}{2},m}(st) f(t)\, dt.$$

Example 1. If

$$f(t) = t^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{t}),$$

then (from 3. (d)) with $k = m + n$ we obtain

$$(22)\quad \Phi(s) = \frac{\Gamma(\nu-n+1)}{\Gamma(\nu+1)} \frac{\Gamma(\nu-2m+1-n)s^{-\nu}}{\Gamma(\nu-2m-2n+1)} {}_2F_2\left[\begin{matrix}\nu-n+1, \nu-2m-n+1 \\ \nu+1, \nu-2n-2m+1\end{matrix}; -\frac{1}{s}\right]$$

$$\Re(\nu-n+1)>0, \quad \Re(\nu-n-2m+1)>0, \text{ and } \Re(s)>0.$$

Hence by Theorem 2, we have

$$\int_0^\infty t^{\frac{\nu}{2}-n-m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{st}{2}} M_{n+m+\frac{1}{2},m}(st) J_\nu(2\sqrt{t})\, dt$$

$$(23)\quad = \frac{(-)^n \Gamma(2m+1)\Gamma(\nu-n+1)\Gamma(\nu-2m-n+1)s^{n-\nu+m-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu-2n-2m+1)\Gamma(n+2m+1)} \times$$

$$\times {}_2F_2\left[\begin{matrix}\nu-n+1, \nu-n-2m+1 \\ \nu+1, \nu-2n-2m+1\end{matrix}; -\frac{1}{s}\right]$$

provided $\Re(\nu-n+1)>0$, $\Re(\nu-n-2m+1)>0$, and $\Re(s)>0$.

7. Theorem 3. *If*

$$t^r f(t) \xrightarrow[m]{k+r+\frac{1}{2}} \Phi_r(s),$$

then

$$(24)\quad \sum_{r=0}^\infty \frac{s^{r-1}}{r!}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^r \Phi_r(s) = \alpha^{k+\frac{1}{2}} \int_0^\infty (st)^{-k-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha st}{2}} W_{k+\frac{1}{2},m}(\alpha st) f(t)\, dt$$

provided $\alpha > \frac{1}{2}$, $\Re(\mu-k+1\pm m)>0$ *where* $f(t) = O(t^\mu)$ *for small* t,

$$t^{-k-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}s_0 t} W_{k+\frac{1}{2},m}(s_0 t) f(t)$$

is bounded for $t \geqq 0$, $\Re(s) > s_0 > 0$, $f(t)$ *is continuous in* $t>0$, *and the series on the left is uniformly convergent.*

Proof. We have

$$(25)\quad \Phi_r(s) = s \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st} (st)^{-r-k-\frac{1}{2}} W_{r+k+\frac{1}{2},m}(st)\, t^r f(t)\, dt.$$

Multiplying both sides by $\frac{1}{r!}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^r$ and taking the sum from zero to infinity and using the result [3, p. 112]

$$\text{(E)}\quad \alpha^{k+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\alpha t} W_{k+\frac{1}{2},m}(\alpha t) = e^{-\frac{1}{2}t} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^r W_{k+r+\frac{1}{2},m}(t)$$

where α is positive, we have

$$\text{(26)}\quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{s^{r-1}}{r!}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^r \Phi_r(s) = \int_0^{\infty} (st)^{-k-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^r}{r!} W_{k+r+\frac{1}{2},m}(st) f(t)\, dt.$$

Using (E), (26) reduces to

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{s^{r-1}}{r!}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^r \Phi_r(s) = \alpha^{k+\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} (st)^{-k-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\alpha st} W_{k+\frac{1}{2},m}(\alpha st) f(t)\, dt.$$

Regarding the change of order of integration and summation the method of Theorem 1 may be followed.

Example 1. If

$$f(t) = t^{\nu} e^{-at},$$

then (from 3 (b))

$$\text{(27)}\quad \Phi_r(s) = \frac{\Gamma_*(\nu-k+1\pm m)}{\Gamma(\nu-2k+1-r)\, s^{\nu+r}}\, {}_2F_1\left[\begin{matrix}\nu-k+1\pm m \\ \nu-2k-r+1\end{matrix}; -\frac{a}{s}\right].$$

Hence by Theorem 3, we get

$$\text{(28)}\quad \int_0^{\infty} (st)^{\nu-k-\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{\alpha s}{2}+a\right)t} W_{k+\frac{1}{2},m}(\alpha st)\, dt = \frac{\Gamma_*(\nu-k+1\pm m)}{s\,\alpha^{k+\frac{1}{2}}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^r}{r!\,\Gamma(\nu-2k-r+1)}\, {}_2F_1\left[\begin{matrix}\nu-k+1\pm m \\ \nu-2k-r+1\end{matrix}; -\frac{a}{s}\right]$$

provided

$\alpha > \frac{1}{2}$, $\Re(\nu-k+1\pm m) > 0$, $\Re(\alpha s+a) > 0$, $\Re(s+a) > 0$, and $|s| > |a|$.

IV.

8. Theorem 4. *If*

$$t^{\mu} f(t) \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} \Phi_{k+\frac{1}{2},m,\mu}(s),$$

then

$$(29)\quad (i)\qquad \Phi_{k+\frac{1}{2},\,m,\,\mu}(s) = \Phi_{k,\,m-\frac{1}{2},\,\mu}(s) + \frac{m-k}{s}\,\Phi_{k-\frac{1}{2},\,m,\,\mu-1}(s)$$

$$(30)\quad (ii)\qquad \Phi_{k+\frac{1}{2},\,m,\,\mu}(s) = \Phi_{k,\,m+\frac{1}{2},\,\mu}(s) + \frac{(-m-k)}{s}\,\Phi_{k-\frac{1}{2},\,m,\,\mu-1}(s)$$

provided the integrals and the series involved are convergent.

Proof. (i) We have

$$(31)\qquad \Phi_{k+\frac{1}{2},\,m,\,\mu}(s) = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st}\,(st)^{-k-\frac{1}{2}}\,W_{k+\frac{1}{2},\,m}(st)\,t^\mu f(t)\,dt.$$

Using the recurrence formula for WHITTAKER function,

$$(F)\qquad W_{k+\frac{1}{2},\,m}(z) = z^{\frac{1}{2}}\,W_{k,\,m-\frac{1}{2}}(z) + (m-k)\,W_{k-\frac{1}{2},\,m}(z)$$

in (31), we obtain

$$(32)\qquad \Phi_{k+\frac{1}{2},\,m,\,\mu}(s) = \Phi_{k,\,m-\frac{1}{2},\,\mu}(s) + \frac{m-k}{s}\,\Phi_{k-\frac{1}{2},\,m,\,\mu-1}(s)$$

provided the integrals and the series involved are convergent.

(ii) If instead of (F) we use

$$(G)\qquad W_{k+\frac{1}{2},\,m,\,\mu}(z) = z^{\frac{1}{2}}\,W_{k,\,m+\frac{1}{2}}(z) + (-k-m)\,W_{k-\frac{1}{2},\,m}(z)$$

then

$$(33)\qquad \Phi_{k+\frac{1}{2},\,m,\,\mu}(s) = \Phi_{k,\,m+\frac{1}{2},\,\mu}(s) + \frac{(-k-m)}{s}\,\Phi_{k-\frac{1}{2},\,m,\,\mu-1}(s).$$

Theorem 4 helps us to find the recurrence relations of the images of the functions of the form $t^\mu f(t)$, where μ is an arbitrary constant, provided the integrals and the series involved are convergent. The same relation holds for the images of all functions of the type. Also it helps in summing up certain series.

Example 1. If

$$f(t) = J_\nu(at),$$

then (3. (e) gives)

$$\Phi_{k+\frac{1}{2},\,m,\,\mu}(s) = \frac{a^\nu\,\Gamma_*(\mu+\nu-k\pm m)}{s^{\mu+\nu}\,2^\nu\,\Gamma(\mu+\nu-2k+1)\,\Gamma(\nu+1)} \times$$

$$(34)\qquad \times {}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{\mu+\nu-k+1\pm m}{2}, & \frac{\mu+\nu-k+2\pm m}{2} \\ \nu+1, & \frac{\mu+\nu-k2+1}{2}, \quad \frac{\mu+\nu-2k+2}{2}\end{matrix};\quad -\frac{a^2}{s^2}\right]$$

$$\Re(\mu+\nu+1-k\pm m)>0,\quad \Re(s)>0,\ \text{and}\ |s|>|a|.$$

Applying Theorem 4 (i), we get

$$(35)\quad (\mu+\nu-2k+1)\,{}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{\mu+\nu-k+1\pm m}{2}, & \frac{\mu+\nu-k+2\pm m}{2} \\ \nu+1, & \frac{\mu+\nu-2k+1}{2}, \quad \frac{\mu+\nu-2k+2}{2}\end{matrix}; -\frac{a^2}{s^2}\right]$$

$$= (\mu+\nu-k-m+1)\,{}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{\mu+\nu-k+1+m}{2}, & \frac{\mu+\nu-k+2\pm m}{2}, & \frac{\mu+\nu-k+3-m}{2} \\ \nu+1, & \frac{\mu+\nu-2k+2}{2}, & \frac{\mu+\nu-2k+3}{2}\end{matrix}; -\frac{a^2}{s^2}\right]$$

$$+ (m-k)\,{}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{\mu+\nu-k+1\pm m}{2}, & \frac{\mu+\nu-k+2\pm m}{2} \\ \frac{\mu+\nu-2k+2}{2}, & \frac{\mu+\nu-2k+3}{2}, \quad \nu+1\end{matrix}; -\frac{a^2}{s^2}\right].$$

Putting

$\mu+\nu-k+m+1=2\alpha$, $\mu+\nu-k-m+1=2\beta$, $\mu+\nu-2k+1=2\gamma$, and $\nu+1=\delta$.

Equation (35) reduces to

$$(36)\quad (\gamma)\,{}_4F_3\left[\begin{matrix}\alpha, \beta, \alpha+\frac{1}{2}, \beta+\frac{1}{2} \\ \gamma, \gamma+\frac{1}{2}, \delta\end{matrix}; -\frac{a^2}{s^2}\right] = (\beta)\,{}_4F_3\left[\begin{matrix}\alpha, \alpha+\frac{1}{2}, \beta+\frac{1}{2}, \beta+1 \\ \gamma+\frac{1}{2}, \gamma+1, \delta\end{matrix}; -\frac{a^2}{s^2}\right]$$
$$+ (\gamma-\beta)\,{}_4F_3\left[\begin{matrix}\alpha, \beta, \alpha+\frac{1}{2}, \beta+\frac{1}{2} \\ \gamma+\frac{1}{2}, \gamma+1, \delta\end{matrix}; -\frac{a^2}{s^2}\right].$$

Example 2. If

$$f(t) = t^{\lambda} e^{-\frac{1}{2}t^2},$$

then (3.(c)) gives

$$(37)\quad \Phi_{k+\frac{1}{2},m,\mu}(s) = \frac{\Gamma(-2m)\,\Gamma(2m+1)}{\Gamma_*(-k\pm m)}\, e^{\frac{1}{4}s^2} s^{m-k+1} \times$$
$$\times \sum_{r=0}^{\infty} \frac{s^r}{r!} \frac{\Gamma(m-k+r)\,\Gamma(\lambda+\mu-k+r+m+1)}{\Gamma(2m+1+r)} D_{-(\lambda+\mu-k+r+m+1)}(s)$$
$$+ (\text{a series obtained by replacing } m \text{ by } -m)$$

provided $2m$ is not an integer and $\Re(\lambda+\mu-k+1\pm m)>0$.

Hence by Theorem 4 (ii), with $k=m$ and after simplification, we obtain

$$s^{2m}\,\Gamma(\lambda+\mu+1)\,D_{-(\lambda+\mu+1)}(s)$$
$$= \frac{\Gamma(1-2m)\,\Gamma(2m+2)}{\Gamma(-2m)}\, s^{2m+1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{s^r\,\Gamma(\lambda+\mu+r+2)}{\Gamma(2m+2+r)} D_{-(\lambda+\mu+r+2)}(s)$$
$$(38)\quad - \Gamma(2m+1) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{s^r\,\Gamma(\lambda+\mu+r+1-2m)}{\Gamma(r+1-2m)} D_{-(\lambda+\mu-2m+r+1)}(s)$$
$$+ \Gamma(2m+1)\, s^{2m} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{s^r\,\Gamma(\lambda+\mu+r+1)}{\Gamma(2m+r+1)} D_{-(\lambda+\mu+r+1)}(s)$$
$$+ \Gamma(2m+1) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{s^r\,\Gamma(\lambda+\mu+r-2m+1)}{r!} D_{-(\lambda+\mu+r-2m+1)}(s)$$

provided

$$\Re(\lambda+\mu+1)>0, \quad \Re(\lambda+\mu-2m+1)>0,$$

and $2m$ is not an integer.

Example 3. If

$$f(t)=e^{-bt}J_\nu(at),$$

then by Theorem 4 (i) with $k=-m$, we have

$$\left(\frac{s}{s+b}\right)^{\mu+\nu+1}\frac{\Gamma(\mu+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{\mu+\nu+1}{2}, & \frac{\mu+\nu+2}{2}\\ \nu+1\end{matrix};\ -\left(\frac{a}{b+s}\right)^2\right]$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-)^r}{r!}\,\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2r}\Gamma(\mu+\nu+2r+2)}{\Gamma(\nu+r+1)\,(\mu+\nu+2m+2r+1)}\times$$

$$\times\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\mu+\nu+2m+2r+1, & \mu+\nu+2r+2\\ \mu+\nu+2m+2r+2\end{matrix};\ -\frac{b}{s}\right]$$

(39)

$$+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-)^r}{r!}\,\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2r}\Gamma(\mu+\nu+2r+1)}{\Gamma(\nu+r+1)\,(\mu+\nu+2m+2r+1)}\times$$

$$\times\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\mu+\nu+2m+2r+1, & \mu+\nu+2r+1\\ \mu+\nu+2m+2r+2\end{matrix};\ -\frac{b}{s}\right]$$

provided

$\Re(\mu+\nu+1)>0$, $\Re(\mu+\nu+2m+1)>0$, $\Re(b+s)>0$, and $|(b+s)|>|a|$.

I am thankful to Dr. S. K. Bose of the Lucknow University for his help.

References.

Bose, S. K.

[1] Bull. alcutta Math. Soc., 41 (1949), p. 9—27.

Erdélyi, A.

[2] Mathematische Annalen, 113 (1936), p. 359.

Goldstein, S.

[3] Proc. of the London Math. Soc., 34 (1932), p. 103—125.

Mc Lachlan, N. W. and Humbert, P.

[4] Formulaire pour le calcul symbolique. (1941).

Meijer, C. S.

[5] Nederl. Akad. Weteusch., Proc. 44 (1941), p. 727—737.

Whittaker, E. T.

[6] Proc. of the London Math. Soc. (1), 35 (1903), p. 417—427.

(Eingegangen am 11. Juni 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 3, S. 399—400 (1952).

Zum Beweis eines Satzes über die Polynomdarstellung der Ordnungszahlen.

Von

Walter Neumer in Mainz.

Herr KALUZA jr. hat folgenden Satz bewiesen[1]):
Nennt man in der CANTORschen Normaldarstellung

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} a_0 + \omega^{\alpha_1} a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_n} a_n \qquad (\alpha_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_n) \tag{1}$$

einer Ordnungszahl α die Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Exponenten erster Stufe von α, deren Exponenten erster Stufe die Exponenten zweiter Stufe von α usf., so gelangt man nach endlich vielen, etwa q, Schritten zu Exponenten q-ter Stufe, die sämtlich ε-Zahlen oder Null sind (wobei der Exponent einer natürlichen Zahl $\geqq 0$ als 0 und der Exponent einer ε-Zahl $\alpha = \omega^\alpha$ als α festgesetzt wird).

Dieser Satz wurde von Herrn KALUZA mittels Betrachtungen aus der Theorie der Graphen bewiesen. Er läßt sich aber auch direkt einsehen wie folgt.

Wenn $\alpha = \omega^\alpha$, so ist nichts zu beweisen. Sei also $\alpha < \omega^\alpha$. Dann liefert (1) die Reihe von Ungleichungen

$$\alpha > \alpha_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_n. \tag{2}$$

Kein Exponent einer Zahl (2) ist $> \alpha_0$. Fügen wir also in die Reihe (2) noch die Exponenten zweiter Stufe der Größe nach ein, so weit sie nicht schon in (2) vorkommen, so erhalten wir eine Reihe

$$\alpha > \alpha_0 > \alpha_1' > \alpha_2' > \cdots > \alpha_{n'}'. \tag{3}$$

Kein Exponent einer Zahl (3) außer α_0 ist $> \alpha_1'$; durch Einschieben der neu auftretenden Exponenten dritter Stufe in (3) entsteht daher eine Reihe

$$\alpha > \alpha_0 > \alpha_1' > \alpha_2'' > \alpha_3'' > \cdots > \alpha_{n''}''. \tag{4}$$

Kein Exponent einer Zahl (4) außer α_0 und α_1' ist $> \alpha_2''$ usw. Fortsetzung dieses Verfahrens liefert also eine absteigende Reihe von Zahlen $\alpha_1^{(i)}$, die abbrechen muß, so daß die Menge

$$M = \{\alpha, \alpha_0, \alpha_1', \ldots, \alpha_m^{(m)}\} \tag{5}$$

[1]) Zur Rolle der Epsilonzahlen bei der Polynomdarstellung von Ordnungszahlen. Math. Ann. **122** (1950), 321—322.

die Zahl α sowie die sämtlichen möglichen verschiedenen Exponenten aller Stufen von α, nach abnehmender Größe geordnet, darstellt. Die Zahl $\alpha_i^{(i)}$ $(0 \leqq i \leqq m)$ kann nicht als Exponent höherer als $(i+1)$-ter Stufe auftreten, es sei denn, sie sei ε-Zahl oder 0. $\alpha_m^{(m)}$ ist ε-Zahl oder 0.

Demnach stehen als Exponenten erster Stufe nur gewisse Zahlen aus der Menge $M - \{\alpha\}$ zur Verfügung, als Exponenten zweiter Stufe, wenn α_0 nicht ε-Zahl ist, nur gewisse Zahlen aus $M - \{\alpha, \alpha_0\}$, als Exponenten dritter Stufe, wenn nicht α_0 oder α_1' ε-Zahlen sind, nur gewisse Zahlen aus $M - \{\alpha, \alpha_0, \alpha_1'\}$ usw. Also müssen spätestens die Exponenten $(m+1)$-ter Stufe ε-Zahlen oder Null sein.

(Eingegangen am 10. November 1951.)

Nachtrag zu der Arbeit „Abhängigkeit von Funktionen"

von **Martin Kneser** in Münster.

Wie mir erst jetzt bekannt wurde, sind die Ergebnisse der oben genannten Arbeit (diese Zeitschrift, Band 54 (1951), S. 34—51) enthalten in A. Sard: The measure of the critical values of differentiable maps; Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), S. 883—890. Neu sind höchstens die Hilfssätze von § 1, die aber vielleicht auch an sich von Interesse sind.

(Eingegangen am 16. Januar 1952.)

Prize Essay Contest of the Institute for the Unity of Science.

The Institute for the Unity of Science is offering a prize of $ 500 for the best essay on the theme „Mathematical Logic as a Tool of Analysis: Its Uses and Achievements in the Sciences and Philosophy". Two additional prizes of $ 200 each will be given for the next best two essays. It is an International Contest and is open to everyone. Essays must not exceed 25000 words. They may be written in English, French or German and must be submitted before January 1, 1953. Further information can be obtained from the Institute for the Unity of Science, American Academy of Arts and Sciences, 28 Newbury Street, Boston 16, Massachusetts (USA).